Workshop de Gestão, Tecnologia Industrial e Modelagem Computacional

SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO TRIDIMENSIONAL USANDO OS MÉTODOS HE-LAPLACE E GITT

Frederico A. Xavier (Mestrando - MCTI), fredxavier85@gmail.com;
Davidson M. Moreira (Orientador - MCTI), davidson.moreira@fieb.org.br;
Faculdade SENAI CIMATEC

Palavras Chave: Dispersão de Poluentes, *He-Laplace, GITT.*

Introdução

Devido à crescente preocupação com a qualidade do ar nos centros urbanos, muitos estudos científicos têm visado modelar a dispersão de contaminantes (ou *poluentes)* na atmosfera, provenientes de uma fonte emissora (e.g: uma indústria). O desafio, no entanto, jaz na quantidade de parâmetros (como a turbulência, velocidade do vento e termos não-lineares em geral) que dificultam a obtenção de uma solução exata para o modelo de dispersão.

Atualmente uma ampla variedade de métodos analíticos e métodos numéricos foram usados na tentativa de resolver estes problemas tais como: método da decomposição de Adomian (Adomian, 1994), método iterativo variacional (Golbabai e Javidi, 2007), transformada integral (Biazer e Ghazvini, 2009), método da decomposição por Laplace (Khan e Austin, 2010), mas todos estes métodos possuem suas limitações.

O presente trabalho apresenta uma solução para a equação de difusão-advecção tridimensional com coeficientes constantes através de uma combinação do método GITT *(Generalized Integral Transform Technique),* conforme proposto por (Wortmann, 2003) e do método He-Laplace, proposto He (2008). Este último é uma forma de soluções em séries para equações diferenciais, como será visto mais adiante neste artigo. Finalmente, tal combinação de métodos permite encontrar uma solução analítica que represente a concentração de um dado contaminante sendo dispersado no espaço.

Métodos e Resultados parciais

A equação de difusão-advecção, aplicada ao fenômeno de dispersão atmosférica de poluentes, pode ser escrita na seguinte forma:

$$U\frac{\partial C(x,y,z)}{\partial x} = K_y\frac{\partial^2 C(x,y,z)}{\partial y^2} + K_z\frac{\partial^2 C(x,y,z)}{\partial z^2} \quad (1)$$

Onde:

C(x,y,z) é a concentração de um contaminante lançado na atmosfera;

U representa o perfil vertical da velocidade média do vento na direção longitudinal;

K_y *e* K_z são, respectivamente, os coeficientes (constantes) de difusão nas direções *y* e *z*, respectivamente;

Na solução da equação (1) tem-se a condição de fonte dada por:

$$C(0,y,z) = \frac{Q}{U}\delta(y-y_o)\delta(z-H_s) \quad (2)$$

onde H_s é a altura da fonte emissora e δ é a função impulso (Delta de Dirac).

Para resolução da equação diferencial em *C(x,y,z)*, utiliza-se uma combinação dos método *GITT* e He-Laplace. Desta forma, aplicando-se *GITT* na direção *y* e a transformada de Laplace em *x,* tem-se:

$$C_i(s,z) = \frac{1}{s}C_i(0,z) + \frac{1}{Us}L\{K_z\frac{\partial^2 C_i(x,z)}{\partial z^2}\} - \frac{1}{Us}L\{K_y\lambda_i^2 C_i(x,z)\} \quad (3)$$

Aplicando-se a transformada inversa para *s*, tem-se:

$$C_i(x,z) = C_i(0,z) + L^{-1}\left[\frac{1}{Us} L\left\{K_z \frac{\partial^2 C_i(x,z)}{\partial z^2}\right\}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{Us} \quad L\{K_y \lambda_i^2 C_i(x,z)\}\right] \quad (4)$$

Pelo método He-Laplace, a solução final C_i será a soma de soluções parciais C_{io}, C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}... C_{in}, na forma (solução em séries):

$$C_i = C_{io} + C_{i1} + C_{i2} + C_{i3} + \ldots C_{in} \quad (5)$$

Usando-se o Método de Perturbação por Homotopia (HPM) tem-se que o termo inicial C_{io} dada por:

$$C_{io} = \alpha\delta(Z - H) \cong \alpha\cos(\lambda_z) \quad (6)$$

Onde o n-ésimo termo C_{in} é dado pela expressão:

$$C_{in} = L^{-1}\left[\frac{1}{Us} L\left\{K_z \frac{\partial^2 C_{n-1}(x,z)}{\partial z^2}\right\}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{Us} \quad L\{K_y \lambda_i^2 C_{(n-1)}(x,z)\}\right] \quad (7)$$

Utilizando-se a equação (7) para calcular os n-ésimos termos parciais C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}... C_{in}, e dispondo tais termos na Equação (5), tem-se:

$$C = \alpha\cos(\lambda_z)\left\{1 - (K_z + K_y)\left(\frac{x}{U}\right)\lambda_i^2 + \frac{1}{2!}(K_z + K_y)^2\left(\frac{x}{U}\right)^2\lambda_i^4 - \frac{1}{3!}(K_z + K_y)^3\left(\frac{x}{U}\right)^3\lambda_i^6 + \cdots\right\} \quad (8)$$

Pode-se notar que a solução acima é uma expansão em séries da função exponencial (forma gaussiana).
Com isto encontramos uma solução analítica final na forma:

$$C(x,y,z) = \alpha\cos(\lambda_n z)\, e^{-(K_z + K_y)\frac{x}{U}\lambda_i^2} \quad (11)$$

Conclusões

Neste trabalho foi demonstrado que a combinação dos métodos GITT e He-Laplace pode ser utilizada para encontrar uma solução analítica para a equação de difusão-advecção aplicada à dispersão de poluentes na atmosfera. Algumas aproximações foram feitas para fim de simplificação de cálculo e como demonstração do método. No entanto, a solução encontrada tem formato semelhante à solução da equação para 2 dimensões *C(x,z)* (solução Gaussiana).
A próxima etapa do trabalho consiste em calcular uma solução para parâmetros *Ky e Kz* variáveis na direção *z*, uma vez que tais coeficientes, no fenômeno de dispersão, de fato variam conforme a distância da fonte ou da altura *z.* Tal modelo permitirá encontrar uma solução mais condizente e realista para o fenômeno de dispersão atmosférica. A solução encontrada em (11) também será validada comparando-se com dados experimentais obtidos no experimento de Copenhagen (Gryning e Lyck, 1984).

Referências

BIAZER J.; GHAZVINI H., **He's homotopy perturbation method for solving systems of Volterra Integral equations, Chaos, Solitons, Fractals**, vol. 39, pp. 370-377, 2009.

GOLBABAI, A.; JAVIDI, M., **A variational iteration method for solving parabolic partial differential equation, Computers & Mathematics with Applications**, vol. 54, no. 7-8, pp. 987-992, 2007.

GRYNING, S.E. e LYCK, E., 1984. **Atmospheric Dispersion from elevated sources in na urban area: Comparison between tracer experiments and model calculations,** Journal of Climate and Applied Meteorology, vol. 23(4) pp.651 – 660.

J.-H. He, **Recent development of the homotopy perturbation method**, Topological methods in Nonlinear Analysis, vol. 31, no. 2, pp. 205-209, 2008.

MOREIRA, D.M. e VILHENA, M.T. "Air Polution and Turbulence". **Modelling and Applications**. Boca Raton vol. 39, CRC Press, pp. 354, 2009.

WORTMANN, S., 2003. **Formulação semi-analítica para a Equação Transformada resultante da aplicação da GITT em problemas difusivos-advectivos**. Tese de Doutorado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.