Workshop de Gestão, Tecnologia Industrial e Modelagem Computacional

UMA NOVA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO COM COEFICIENTE DE DIFUSÃO DEPENDENTE DA DISTÂNCIA DA FONTE

Palmira Maria de Santana Acioli (Mestranda - MCTI), palmira.engmec@gmail.com;
Davidson Martins Moreira (Orientador - MCTI), davidson.moreira@fieb.org.br ;
Faculdade SENAI CIMATEC

Palavras Chave: transformada de Laplace; homotopia; equação de difusão-advecção.

Introdução

A dispersão de poluentes na atmosfera é um fenômeno que ocorre diariamente, o qual afeta de forma direta tanto a qualidade de vida dos seres humanos como do nosso planeta. No entanto, na literatura, uma solução analítica da equação de difusão-advecção que abrange um problema da vida real de dispersão de poluentes na atmosfera ainda não foi encontrada. Atualmente uma ampla variedade de métodos analíticos e numéricos foram usados na tentativa de resolver estes problemas tais como: método das diferenças finitas (DEBNATH,1997) (KRISHNAMURTHY; SEM ,2001), método da decomposição de Adomian (ADOMIAN, 1994), método iterativo variacional (GOLBABAI; JAVIDI, 2007), transformada integral (BIAZER; GHAZVINI, 2009), método da decomposição por Laplace (AUSTIN; KHAN,2010), mas todos estes métodos possuem suas limitações.
Este trabalho tem como objetivo obter a solução da equação de difusão-advecção com coeficiente de difusão dependente da distância da fonte usando o novo método de He-Laplace o qual é uma combinação da transformada de Laplace e do método de perturbação por homotopia (HPM) A vantagem deste método é a sua capacidade de combinar dois métodos poderosos para a obtenção de soluções exatas de equações diferenciais parciais lineares e não-lineares.

Métodos e Resultados parciais

A modelagem da dispersão de poluentes na atmosfera pode ser dada pela equação tridimensional de difusão-advecção:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + u\frac{\partial c}{\partial y} + u\frac{\partial c}{\partial z} = Kx\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + K_Y\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K_Z\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + R \qquad (1)$$

Onde:

- *C* é a concentração de um determinado contaminante lançado na atmosfera;
- *u* ,*v* e *w* são as componentes nas direções *x*, *y* e *z* da velocidade do vento, respectivamente;
- K_x , K_y , K_Z são os coeficientes de difusão nas suas respectivas direções;
- *R* pode ser termo de reação química.

Simplificadamente, a equação (1) pode ser escrita da seguinte forma (MOREIRA; VILHENA, 2009):

$$U(z)\frac{\partial c(x,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_Z(x)\frac{\partial^2 c(x,z)}{\partial z^2}\right) \qquad (2)$$

onde *U*(*z*) representa o perfil vertical da velocidade média do vento na direção longitudinal e K_z é o coeficiente de difusão vertical. Neste estudo, o coeficiente de difusão vertical é dependente somente da distância longitudinal da fonte, de forma que pode ser escrito como:

$$K_Z(x) = \propto f(x) \qquad (3)$$

Assim, para obtenção da solução da equação (2) é possível fazer uma mudança de variável da seguinte forma:

$$x^* = \int_0^{x'} f(x')dx' \qquad (4)$$

onde *x** mantêm sua dimensão original [L] e ∝ é a parte dimensional do coeficiente de difusão [L^2/T].

ISSN online 2447-9640

Por simplicidade, considera-se *U* e K_z constantes. Logo, a equação (2) pode ser reescrita:

$$U\,\frac{\partial c(x,z)}{\partial x^*} = \propto \frac{\partial^2 c(x,z)}{\partial z^2} \tag{5}$$

Para solução da equação (5) necessita-se determinar as condições de contorno. Desta forma, tem-se a condição de fluxo nulo de contaminantes na superfície e no topo do domínio vertical:

$$K_Z \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = h \tag{6}$$

onde *h* é a altura da camada limite planetária. Além disto, tem-se uma fonte com taxa de emissão *Q* na altura da fonte H_s :

$$c(0,z) = \frac{Q}{U}\,\delta\left(z - H_s\right) \tag{7}$$

onde a função Delta de Dirac $\delta(.)$ é aproximada por:

$$\delta(z - H_S) = \frac{1}{h}\,\left[1 + 2\,\sum_{n=1}^{\infty}[\cos(\lambda_n z)\cos(\lambda H_S)]\right] \tag{8}$$

sendo os autovalores dados por:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{h} \tag{9}$$

Assim, a condição da fonte pode ser escrita como:

$$c(0\,,z) = \frac{Q}{Uh}\,\left[1 + 2\,\sum_{n=1}^{\infty}[\cos(\lambda_n z)\cos(\lambda H_S)]\right] \tag{10}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na Eq. (5), na variável *x*, obtém-se:

$$c(x\,,z) = c_0 + L^{-1}\left[\frac{\alpha}{sU}L\left[\frac{\partial^2 c(x,z)}{\partial z^2}\right]\right] \tag{11}$$

Logo, para obtenção dos demais termos da solução em série tem-se a equação escrita de forma genérica:

$$c_n = L^{-1}\left[\frac{\alpha}{sU}L\left[\frac{\partial^2 c_{(n-1)}}{\partial z^2}\right]\right] \qquad n = 1,2,3.. \tag{12}$$

com solução geral dada por:

$$c(x,z) = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n \tag{13}$$

com $c_0 = c(0,z)$. Logo:

$$c_1 = -\frac{\propto x^*}{U}\frac{2Q}{Uh}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\cos(\lambda_n z)\cos(\lambda_n H_S) \tag{14}$$

Agrupando-se os termos de acordo com a equação (11), a expressão resultante é dada por:

$$\begin{aligned} c\,(x,z) &= \frac{Q}{Uh} + \frac{2Q}{Uh}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\lambda_n z)\cos(\lambda_n H_S)\,. \\ &.\left\{1 - \frac{1}{1!}\frac{\propto x^*}{U}\lambda_n^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\propto x^*}{U}\right)^2\lambda_n^4 + \cdots\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

Substituindo-se *x** na equação (16), tem-se a solução final da equação dada por uma Gaussiana:

$$\begin{aligned} c\,(x,z) &= \frac{Q}{Uh} + \frac{2Q}{Uh}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\lambda_n z)\,. \\ &.\cos(\lambda_n H_S)e^{\left(-\frac{\lambda_n^2}{U}\int_0^{x'} f(x')dx'\right)} \end{aligned} \tag{16}$$

Conclusões

Neste trabalho, o método He-Laplace foi empregado para resolver um problema linear da equação de difusão-advecção com coeficiente de difusão em função da distância da fonte.

Futuramente, a solução analítica obtida neste trabalho será confrontada com dados experimentais provenientes do tradicional experimento de Copenhagen (GRYNING,1984).

Referências

ADOMIAN, G. **Solution of physical problems by decomposition", Computers & Mathematics with Applications**, vol. 27, n. 9-10, p. 145-154, 1994.

BIAZER, J.; GHAZVINI, H. **He's homotopy perturbation method for solving systems of Volterra Integral equations, Chaos, Solitons, Fractals**, vol. 39, p. 370-377, 2009.

DEBNATH, L. **Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**, Birkhauser, 1997.

GOLBABAI, A.; JAVIDI, M. **A variational iteration method for solving parabolic partial differential equation,** Computers & Mathematics with Applications, vol. 54, n. 7-8, p. 987-992, 2007.

GRYNING, S.; LYCK, E. **Atmospheric dispersion from elevated sources in an urban area: c**omparison between tracer experiments and model calculations, Vol 23 p. 651–660,1984.

KHAN, Y.; AUSTIN, F. **Application of the Laplace decomposition method for nonlinear homogenous and non-homogenous advection equations,** Zeitschrift fuer Naturforschun , vol. 65, n. 2, p. 1-5, 2010.

KRISHNAMURTHY, E. V.; SEM, S. K. **Numerical Algorithm Computations in Science and Engineering**, East-West Press, 2001.

MOREIRA, D.M.; VILHENA, M.T. **Air Polution and Turbulence. Modelling and Applications.** Boca Raton vol. 39, p. 354, 2009

ISSN online 2447-9640