

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*



**MODELO EM PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR PARA DECISÃO
DE ORÇAMENTAÇÃO DE CAPITAL EM STARTUPS**

**A NON-LINEAR PROGRAMMING MODEL FOR
BUDGETING DECISION ON NEW FIRMS**

**MODELO DE PROGRAMACIÓN NO LINEAL PARA LA
DECISIÓN DE PRESUPUESTO DE CAPITAL EN INICIO**

Lucas Rodrigues

<https://orcid.org/0000-0002-4496-0391>

Doutorando do Programa de Pós-graduação em Economia Aplicada (ESALQ/USP)
Mestre em Ciências (Economia Aplicada) pela Universidade de São Paulo
E-mail: lucas2.rodrigues@outlook.com.br

Alex da Silva Alves (In Memoriam)

<https://orcid.org/0000-0002-8990-369X>

Professor Livre-Docente do Dep. de Economia, Administração e Sociologia (ESALQ/USP)
Doutor em Economia pela Università Degli Studi Di Milano Bicocca

RESUMO

Obtenção de informações de mercado e dificuldades de acesso a financiamento externo são tradicionais barreiras para um planejamento financeiro que reflita as oportunidades de crescimento de novas empresas de alta tecnologia em mercados emergentes. Há, ainda, uma carência de estudos que proponham uma abordagem metodológica robusta dessas questões. Este artigo desenvolve dois modelos de apoio à decisão baseados no algoritmo de programação não-linear GRG (*Generalized Reduced Gradient*), cuja aplicação se dá no contexto da orçamentação de capital em pequenas e médias empresas de alta tecnologia. O modelo foi concebido a partir da elaboração de três demonstrativos financeiros básicos, sendo estes o demonstrativo de resultado do exercício (DRE), a demonstração de fluxo de caixa (DFC) e o balanço patrimonial. O estudo permitiu tecer considerações sobre os *trade-offs* entre estrutura de capital e valor em empresas de alta tecnologia em mercados emergentes, cujas contribuições podem ser úteis para a comunidade de empreendedores, analistas financeiros, investidores e formuladores de políticas públicas envolvidos em modelagem e planejamento de novos mecanismos de financiamento para *startups*.

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

Palavras-Chave: Capital Empreendedor. Gradiente Reduzido Generalizado. Programação Não Linear. Pequenas e Médias Empresas. Orçamento.

ABSTRACT

Access to market information and difficulties to obtain external financing are traditional barriers to financial planning exercises that reflect the growth opportunities aimed by new high-tech companies from emerging markets. There is also a lack of studies that propose a robust methodological approach to deal with these issues. This article develops two decision support models based on the nonlinear programming algorithm GRG (Generalized Reduced Gradient). The model was applied in the context of capital budgeting in high-tech small and medium enterprises. The models use input information from three basic financial statements, which are the income statement, the cash flow statement and the balance sheet. This study provided insights into the trade-offs of capital-structure and value in high-tech firms operating in developing countries. The discussions and results obtained in the case study carried in this work can be helpful to the community of entrepreneurs, financial analysts, investors, and policy makers involved in the design of new financing mechanisms for startups.

Keywords: Venture Capital. Generalized Reduced Gradient. Non-Linear Programming. Small and Medium Enterprises. Budget.

RESUMEN

Obtener información del mercado y las dificultades para acceder al financiamiento externo son barreras tradicionales para la planificación financiera que reflejan las oportunidades de crecimiento de las nuevas empresas de alta tecnología en los mercados emergentes. También faltan estudios que propongan un enfoque metodológico sólido para estos temas. Este artículo desarrolla dos modelos de soporte de decisiones basados en el algoritmo de programación no lineal GRG (Gradiente reducido generalizado), que se aplica en el contexto del presupuesto de capital en pequeñas y medianas empresas de alta tecnología. El modelo se concibió a partir de la preparación de tres estados financieros básicos, que son el estado de resultados del año, el estado de flujo de efectivo y el balance general. El estudio nos permitió considerar lo *trade-off* entre la estructura de capital y el valor en las empresas de alta tecnología en los mercados emergentes, cuyas contribuciones pueden ser útiles para la comunidad de empresarios, analistas financieros, inversores y responsables de políticas públicas que participan en el modelado y la planificación de los nuevos mecanismos de financiación para *startups*.

Palabras-Clave: Capital Empreendedor. Gradiente Reducido Generalizado. Programacion No Lineal. Pequenas y Medianas Empresas. Presupuesto de Capital.

1 INTRODUÇÃO

A atividade empreendedora de setores intensivos em tecnologia em mercados emergentes, apesar da evolução observada nas últimas décadas, ainda tem sido cercada de substanciais desafios (PINTO; FELDMANN, 2016). Aproximadamente 95% das startups não cumprem as projeções financeiras e de desenvolvimento de produtos e, em 99% dos casos, o motivo apontado por empresários e investidores é a falta de habilidades de planejamento e experiência dos empreendedores (OECD, 2019). Consequentemente a função financeira dessas empresas, em particular, as atividades de orçamentação de capital para previsão da necessidade

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

de recursos para seus ciclos de crescimento sucessivos, traz consigo importantes questões aos tomadores de decisão.

No Brasil, não obstante os ganhos institucionais obtidos ao se comparar a realidade atual com a de algumas décadas atrás, um desafio que ainda se apresenta é a superação dos vínculos que compõem a frágil base produtiva nacional, associada às tradicionais barreiras ao desenvolvimento de produtos e insumos produtivos em variados setores (DE NEGRI; RAUEN, 2018). Portanto, a atividade empreendedora no Brasil ainda é prioritariamente dominada pela necessidade de recursos em curtíssimo prazo pelo empreendedor em detrimento, por exemplo, da obtenção de capital para financiar os esforços de análise de mercado, modelagem de negócios, planejamento e desenvolvimento de novos produtos, serviços ou processos (AURIOL, 2013). A tais desafios somam-se problemas típicos das pequenas empresas, como a elevada incerteza nos estágios iniciais de seu ciclo de vida e dificuldades de acesso a recursos financeiros nos mercados de capitais (OECD, 2006).

Tendo em vista tais desafios, as seguintes questões nortearam o desenvolvimento deste trabalho: qual é o valor potencial de uma oportunidade e quanto de recursos próprios e de terceiros são necessários para desenvolver a nova empresa visando a torná-la capaz de gerar valor? Que indicadores financeiros representam o conjunto de restrições adequadas, tendo em vista as cláusulas contratuais dos financiadores? No intuito de endereçar estas perguntas, este trabalho propõe dois modelos utilizando programação não-linear, os quais objetivam: i) minimização dos dispêndios resultantes da aquisição de dívida financeira; e ii) maximização do valor das operações da empresa. Utiliza-se o Gradiente Reduzido Generalizado (Generalized Reduced Gradient - GRG) como algoritmo para solução dos modelos.

Espera-se, desta forma, ampliar o entendimento da aplicação dos direcionadores de valor e de sobrevivência em tais empresas, de modo a se avaliar e discutir seus impactos e as decisões decorrentes de seu uso. Portanto, o objetivo deste trabalho é propor dois modelos matemáticos que auxiliem o processo de orçamentação e avaliação do potencial da oportunidade de um novo negócio em setor de alta tecnologia. O estudo também explora as diferentes implicações, em termos de risco e valor do negócio, que derivam do uso de cada modelo individualmente, de modo a auxiliar gestores e investidores na escolha do procedimento que melhor atenda suas aspirações e perfil. A fim de ilustrar a aplicabilidade dos modelos, o estudo utiliza dados de empresas do segmento de Tecnologia da Informação. Software e Serviços representam aproximadamente 93% das micro e pequenas empresas brasileiras (ABES, 2015), estando entre os maiores recebedores dos recursos de Venture Capital no país (ABVCAP, 2021a).

O trabalho se estrutura em seis seções, incluindo esta introdução e a bibliografia. Na próxima seção é apresentada uma revisão conceitual da literatura, tomando o cuidado de situar a questão dentro da realidade do contexto de uma nova empresa de tecnologia. Em seguida, realiza-se a apresentação dos modelos quantitativos e das premissas utilizadas para a sua aplicação. Por fim, os resultados obtidos são analisados e são tecidas as considerações finais do trabalho.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Os estágios de crescimento das novas empresas costumam associar ao seu ciclo de vida a sua fase correspondente de crescimento das vendas. Seguindo as considerações de Caselli (2010) e Villa e Antonelli (2009), as quais não serão detalhadas aqui, agrupam-se tais empresas em seis grupos principais: i) em desenvolvimento; ii) *startup* ou empresa nascente; iii) em

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

crescimento inicial (*early growth*); iv) em crescimento acelerado (*rapid growth*); v) madura; e vi) em crise ou declínio.

Empresas em desenvolvimento, *startups* e em crescimento inicial serão chamadas aqui de empresas emergentes. Embora empresas emergentes apresentem dificuldade em definir premissas financeiras básicas e encontrar empresas comparáveis, os princípios que regem a avaliação não se alteram, uma vez que parte substancial das avaliações enfatiza a projeção de fluxos de caixa operacionais em horizontes de tempo delimitados (LEACH; MELICHER, 2015). Por outro lado, ao se considerar as fontes de financiamento, pode haver substanciais diferenças em função do estágio de crescimento da firma. Firms emergentes, por exemplo, têm difícil acesso à financiamento por meio de dívida, por não apresentar uma estrutura de ativos que demonstre claramente a geração de resultado operacional, enquanto que empresas em crescimento rápido e maduras podem encontrar melhores condições de financiamento nos mercados de dívida e acionário (DAVILA; FOSTER ; GUPTA, 2002; LERNER; LEAMON ; HARDYMON, 2012). Essa condição acaba por limitar as possibilidades de financiamento das empresas emergentes, mesmo para aquelas com uma valoração (*valuation*) sólida e boas perspectivas de mercado.

Modigliani e Miller (1958) introduziram a discussão sobre como a alavancagem da firma (endividamento com capital de terceiros), sob certos pressupostos, não deveria afetar o valor das empresas. No entanto, mais tarde, ajustaram suas proposições considerando os efeitos dos impostos, o que reduziria o custo da dívida (MODIGLIANI; MILLER, 1963). Apesar das inúmeras críticas aos pressupostos de Modigliani e Miller ao longo das últimas quatro décadas por não tratarem questões como custos de falência ou recuperação judicial, suas formulações acerca dos determinantes da estrutura de capital e as circunstâncias que impactam o valor das firmas contribuíram para o surgimento de novas teorias baseadas em imperfeições do mercado (DURAND, 1959).

Neste propósito, Carpenter e Petersen (2002) estudaram 2.200 empresas de alta tecnologia de capital aberto entre 1981 e 1998. Os autores observaram que a maioria das empresas analisadas usaram pouco capital de terceiros. A maior fonte de recursos para o crescimento dessas empresas veio das respectivas Ofertas Públicas Iniciais, após as quais os autores notaram níveis baixos de financiamento externo, tendo, portanto, prevalecido o financiamento via patrimônio líquido ou recursos internos.

O trabalho de Holmes e Kent (1991) aponta que tamanho de uma firma se apresenta como uma variável capaz de explicar a dificuldade de acesso a capital de terceiros, especialmente de longo prazo. Ainda, este mesmo estudo destaca que novas empresas são mais dependentes de dívida pela dificuldade inicial de gerar receitas e de obter novos aportes dos sócios. O estudo realizado por Robb e Robinson (2014) acerca da estrutura de capital de 4.163 novas firmas corrobora esta visão, evidenciando maior dependência de capital de terceiros para o financiamento de suas operações.

Bancos, em contrapartida, quando optam por fornecer recursos a empresas novas impõem cláusulas de proteção para se resguardar de um risco considerado, normalmente, elevado (HEALY; PAPELU ; BERNARD, 2003). Retornos altamente variáveis, informações assimétricas e falta de garantias fazem com que pequenas empresas de alta tecnologia tenham, a despeito da necessidade, pouco acesso a dívidas (HOLTHAUSEN; ZMIJEWSKI, 2014). As dificuldades de acesso a capital de terceiros por parte de pequenas empresas em geral, e as novas em particular, criam uma imperfeição de mercado (SCHIANTARELLI, 1995; HUBBARD, 1998) na qual ofertantes de recursos não encontram condições adequadas para a

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

identificação e análise de retornos ajustados ao risco das empresas demandantes (CRESSY, 2002; OECD, 2006).

Para o caso das pequenas empresas de alta tecnologia, a literatura aponta três principais razões porque tais empresas são impactadas por imperfeições de mercado: i) os retornos dessas empresas são enviesados e altamente incertos, em parte porque os retornos provenientes de investimentos em Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) apresentam baixa probabilidade de sucesso (CHAN; LAKONISHOK ; SOUGIANNIS, 2001; JOGLEKAR; LEVESQUE, 2009); ii) existem assimetrias de informação entre as empresas e investidores em potencial (LEE; GREWAL, 2004; GOMPERS, *et al.*, 2008), pois investimentos em alta tecnologia são difíceis de avaliar e os empreendedores possuem mais informação que os agentes externos sobre as condições de retorno do investimento demandado (LERNER; LEAMON ; HARDYMON, 2012); iii) investimentos em alta tecnologia possuem poucas garantias reais, com limitados ativos com valor residual significativo face os vultosos investimentos necessários para desenvolver estes negócios (RAMSHINGHANI, 2014; LERNER; HARDYMON ; LEAMON, 2012).

Como resposta e, visando a assumir tais riscos não enfrentados por modalidades mais tradicionais de financiamento, outros agentes acabaram surgindo, embora com diferenças substanciais em relação ao mercado de dívida. Nesse âmbito, o mercado de *Private Equity*, em particular nas modalidades de investimento de *venture capital* (VC), investidores-anjo e fundos de capital semente, mostram-se como fontes de recursos para essas novas empresas, sobretudo as que desenvolvem modelos de negócios com produtos e serviços intensivos em tecnologia (ROBBIE; WRIGHT, 1997; WILTBANK, *et al.*, 2009). Trata-se de intermediários financeiros, normalmente organizados na forma de fundos de investimento sob regime de condomínio fechado e altamente especializados que compram participações em empresas novas em diferentes estágios (ZIDER, 1998; ARMOUR; CUMMING, 2005).

As modalidades tradicionais de financiamento com capital de terceiros trabalham, sobretudo, com foco na dívida, enquanto o *Private Equity* atua no Patrimônio Líquido (PL) da empresa investida (ZIDER, 1998). Apesar das suas diferenças, pela sua característica de participação no capital social da empresa, investidores nestas modalidades criam uma relação estreita com os empreendedores (DAVILA; FOSTER ; GUPTA, 2002; LERNER; LEAMON ; HARDYMON, 2012).

Esses empreendedores de novas empresas de tecnologia devem enfrentar uma série de desafios, tais como: assimetrias de informação, riscos de agência, incertezas na materialização dos fluxos de caixa, custos de falência, dentre outros já mencionados. Em uma condição de inexistência de ativos reais tangíveis e um baixo ou nenhum histórico financeiro, caso típico das empresas novas de tecnologia, esses empreendedores contam, majoritariamente, com recursos próprios e os investidores de *private equity*. Estes últimos, por sua vez, a fim de proteger seu capital, demandam cláusulas contratuais restritivas envolvendo desde o comportamento dos empreendedores até metas econômico-financeiras rigorosas (GOMPERS; LERNER, 1996; METRICK; YASUDA, 2010).

Entretanto, não é apenas a falta de oferta de capital para novas empresas que tornam essas opções alternativas favoráveis. A dificuldade de acesso ao capital de terceiros e a própria preferência dos empreendedores por modalidades de financiamento que limitem o pagamento de obrigações fixas acaba por gerar uma aversão a aquisição de endividamento (HAMILTON; FOX, 1998; HOLMES; KENT, 1991; SCHERR; SUGRUE ; WARD, 1993; ALMEIDA; CAMPello, 2010; LEMMON; ZENDER, 2010). Partindo destas considerações, o primeiro modelo proposto visa a minimização das despesas financeiras, refletindo a aversão dos próprios

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

sócios em contrair capital de terceiros. O segundo modelo objetiva a maximização do valor do negócio por meio da decisão sobre a estrutura de financiamento. As implicações da escolha de um ou outro modelo serão objeto de análise nos resultados desse estudo.

Apesar de a literatura reconhecer o pressuposto fundamental da teoria econômica clássica, para a qual o objetivo da firma é maximizar o lucro (STIGLER, 1957), não se pode esperar que os condicionantes para a maximização dos lucros se manifestem homogeneamente em todos os mercados. Há autores que argumentam que maximização do lucro é mais uma suposição que um objetivo, válido nas circunstâncias em que o custo marginal da firma fosse igual a zero (SOLOW, 1971; KOPLIN, 1963). Na falta de custos marginais nulos, a empresa poderia aumentar as suas vendas ao invés do lucro (MERT, 2018; LARSON; GIFFIN, 1980).

Ainda, há uma limitada gama de estudos propondo procedimentos estruturados para o processo de decisão na orçamentação de capital em empresas emergentes. As maiores dificuldades em trazer tais propostas baseadas em dados empíricos estão, sobretudo, na relutância dos empreendedores em divulgar informações que revelem seus modelos e estratégias de negócio. Segundo Stancill (1986), é impossível saber a quantia exata de recursos que as novas empresas irão precisar nos primeiros anos de seu ciclo de vida. No entanto, este mesmo autor deixa claro que ainda é possível realizar estimativas realistas. Outros autores também se debruçaram no tema de orçamentação de capital em novas empresas, visando entender como decisões sobre estrutura de capital, custo de capital e ambiente institucional (qualidade do ecossistema) podem inibir ou impulsionar o investimento em novos negócios (PROBERT; CONNELL; MINA, 2013; GRILLI; MURTINU, 2014). Neste trabalho, busca-se contribuir para a literatura sobre o tema a partir da proposição de modelos matemáticos que auxiliem empreendedores e administradores de empresas emergentes no processo de orçamentação de capital e planejamento financeiro. Utiliza-se da Programação Não-Linear (PNL) e ilustra-se a aplicação do procedimento a partir de um caso construído utilizando dados do setor de tecnologia da informação.

3 O MODELO

A PNL permite representar circunstâncias mais complexas da realidade, sobretudo em função da quebra de algumas hipóteses típicas da Programação Linear tais como proporcionalidade e aditividade (CARPENTIER; ABADIE, 1969; HILLIER; LIEBERMAN, 2015). Todavia, mesmo considerando uma miríade de aplicações recentes envolvendo modelagem não-linear (HILLIER; LIEBERMAN, 2015), a aplicabilidade dos resultados provenientes de modelos de PNL apresenta críticas não de todo recentes (ACKOFF, 1979; JACKSON; MULVEY, 1978). Bertsekas (2016) aponta que, ao contrário da programação linear, a solução para um problema de PNL pode se localizar em qualquer ponto na região de soluções viáveis, como um ponto na fronteira ou um ponto interno, o que dificulta a solução. Ainda, a solução obtida por algoritmos de PNL pode representar um ponto de máximo ou mínimo local, enquanto o algoritmo linear mais conhecido, o Método *Simplex*, garante que a solução obtida é, necessariamente, um ótimo global (HILLIER; LIEBERMAN, 2015).

Tipicamente, um modelo de PNL envolve uma função objetivo $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que se deseja maximizar (ou minimizar), sujeita a um número m de restrições definidas por $\{g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\}_{i=1}^m$ que podem ser de igualdade e/ou desigualdade, todas vinculadas às n variáveis do modelo. O Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), utilizado neste trabalho, é proveniente do aprimoramento do Gradiente Reduzido de Wolfe (CARPENTIER; ABADIE, 1969), e surgiu objetivando endereçar as principais dificuldades inerentes a modelos de PNL.

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

Como objetivo geral, o GRG visa converter um problema restrito a um irrestrito, criando um vetor de busca para facilitar o encontro do ponto ótimo do problema (BERTSEKAS, 2016). Assim, o algoritmo utiliza uma solução experimental atual $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ e a derivada direcional (gradiente da função objetivo), para obter a direção que maximiza (ou minimiza) a função-objetivo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Essa direção é o próprio gradiente da função-objetivo avaliado no ponto \mathbf{x}^0 , o qual denomina-se ∇f (HILLIER; LIEBERMAN, 2015). O gradiente de uma função-objetivo orienta a seleção de valores para as variáveis básicas do modelo de interesse. Quando a mudança entre um candidato à solução para outro gera uma variação na função-objetivo inferior ao limite de tolerância (ϵ), i.e, $\|\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| < \epsilon$ (norma do vetor gradiente), o algoritmo assume que se encontra em um ponto crítico da função (máximo ou mínimo), que pode ser tanto local como global (BECK, 2014). Para dirimir o problema relacionado à convergência para um ótimo global, seguindo orientações de Bertsekas (2016), concedem-se pontos de partida distintos para orientação do algoritmo. Havendo convergência da função objetivo para um mesmo ponto em diversas situações, isso garantirá uma maior chance de que tal resultado corresponda a um ótimo global.

O Apêndice 1 expõe as equações que compõem os modelos e, concomitantemente, a Tabela 7 apresenta a descrição das variáveis. apresenta a descrição das variáveis. Ambos os modelos partem das projeções dos demonstrativos de fluxo de caixa, demonstração de resultados e do balanço patrimonial. Cabe destacar que a escolha de um ou outro modelo depende do objetivo, perfil de aversão ao risco e das aspirações dos gestores e investidores. Como discutido anteriormente, a dificuldade de acesso a capital de terceiros para empresas emergentes é uma preocupação do gestor e dos sócios, que muitas vezes optam por um nível mínimo de endividamento para não comprometer a operação do negócio. Portanto, o primeiro objetivo, o qual chamamos de Modelo 1, consiste na minimização das despesas financeiras derivadas de financiamento externo. Entende-se a despesa financeira como o produto entre a taxa de juros praticada no mercado e o saldo devedor da dívida. A função-objetivo que define o Modelo 1, de minimização, é representada na Equação (2), do Apêndice 1. Por outro lado, o segundo objetivo, o Modelo 2, visa a escolha do nível de financiamento que maximize o valor da empresa. A função-objetivo, de maximização, vinculada ao Modelo 2, é apresentada resumidamente na Equação (1) adiante, e, de forma ampliada, na Equação (3) do Apêndice 1.

Ao se observar a função-objetivo de minimização na Equação (2), o termo " j " refere-se ao mês no qual o empréstimo foi tomado, podendo variar de 1 a 72; " m " consiste nos meses referentes às amortizações do principal de um empréstimo tomado no mês j ; " t " é a tipologia de financiamento, sendo 1 para curto prazo e 2 para longo prazo; " i " indexa o ano de referência da taxa de juros, esta que pode variar a cada 12 meses; e " ρ " é o tempo de amortização de cada empréstimo. A função objetivo a ser minimizada é, portanto, o somatório do valor das despesas financeiras pagas ao longo dos 72 meses de projeção explícita do exercício de valoração.

Para o Modelo 2, conforme a Equação (3), altera-se a função objetivo para a proposição de maximização do valor da empresa ($\text{Max } Z_v$), sob ótica de mensuração do valor presente dos fluxos de caixa livres (NPV_{FCL}). Considera-se um horizonte de planejamento explícito de $n = 72$ meses, após o qual a empresa entra em um ciclo de perpetuidade com o fluxo de caixa livre perpétuo (FCL_{n+1}) crescendo a uma taxa mensal g_{FCL} . A Equação (1) resume o objetivo de maximização por meio do valor presente da soma dos fluxos de caixa livres no horizonte de planejamento explícito (72 meses) e perpétuo, ambos descontados pelo Custo Médio Ponderado de Capital (Wighted Average Cost of Capital - WACC).

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

$$\max NPV_{FCL} = \sum_{m=0}^n \frac{FCL_m}{(1 + WACC[f(\sum D_m^t)])^m} + \left[\frac{\left(\frac{FCL_{n+1}}{WACC[f(\sum D_m^t)]} - g_{FCL} \right)}{(1 + WACC[f(\sum D_m^t)])^n} \right] \quad (1)$$

Na Equação (1), o termo FCL_m representa o fluxo de caixa livre gerado no mês “ m ”. Relembrando os manuais de finanças (DAMODARAN, 2014), o FCL é medido pelo Lucro Operacional Antes dos Juros e Impostos (EBIT) deduzidos dos encargos com a reposição do capital fixo (I_m), da variação da necessidade de capital de giro (ΔNCG) e dos impostos, e somado às despesas com depreciação (DP_m). O termo $WACC[f(\sum D_m^t)]$ representa o custo médio ponderado de capital, função da proporção de capital próprio e de terceiros e seus respectivos custos. Como se observa na Equação (1), O WACC é também influenciado pela incorporação de dívida à estrutura de capital da empresa, representado pelo somatório dos saldos devedores de empréstimos de curto e longo prazo em um determinado mês “ m ” ($\sum D_m^t$). A empresa, nesse caso, se capitalizará baseando-se na minimização do custo de capital e, conseqüentemente, na maximização do seu valor. A Equação (3) expande a relação mostrada na Equação (1), visando a melhor representar a relação das variáveis componentes do FCL com a função-objetivo. Cabe destacar que os fluxos de caixa livres da empresa não são afetados pelas dívidas tomadas, uma vez que refletem o caixa operacional da empresa, antes das despesas financeiras e aportes de capital.

O conjunto de restrições empregado em ambos os modelos apresenta sua formulação algébrica conforme as Equações (4) a (13), do Apêndice 1. A Tabela 1, por outro lado, apresenta um quadro explicativo da natureza das desigualdades que compõem cada grupo de restrições. Os três primeiros conjuntos de restrições referem-se a indicadores financeiros típicos (HALKOS; TZEREMES, 2012; PHILOSOPHOV; BATTEN, 2008). Neste âmbito, Graham e Campbell (2001) identificaram forte impacto de fatores como gestão de risco, gestão de caixa e demais indicadores financeiros fundamentais nas decisões de alocação de recursos para o crescimento das 392 firmas analisadas em sua pesquisa. A quarta restrição, de risco não-diversificável, foi escolhida por seu impacto na determinação do custo de oportunidade de capital da firma (FAMA; FRENCH, 2004), e, conseqüentemente, em seu valor. Por fim, tais considerações corroboram as poucas evidências disponíveis na literatura de finanças para empreendedores sobre as cláusulas de acompanhamento econômico-financeiro das empresas investidas por fundos de *Venture Capital* (GOMPERS; LERNER, 1996; RAMSHINGHANI, 2014).

Tabela 1 – Conjunto de Restrições do Modelo de Otimização.

Restrição	Explicação	Equação
Caixa mensal (FC_{min})	Visa garantir um valor mínimo de caixa que não comprometa o equilíbrio financeiro e a liquidez da empresa.	Equação (4)
Liquidez corrente (LC)	O indicador de liquidez corrente (ativo circulante/passivo circulante) deve ser superior ao mínimo previamente estabelecido pelos gestores e fornecedores de recursos.	Equações (5), (6), (7), (8), referindo-se aos anos 2, 4, 5 e 6, respectivamente.
Alavancagem financeira ($Alavancagem_{m\acute{a}x}$)	O indicador de alavancagem financeira (capital de terceiros/capital próprio) deve ser inferior ao máximo almejado.	Representado pelas equações (9), (10), (11), e (12), referindo-se aos anos 2, 4, 5 e 6, respectivamente.

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

Risco sistemático/não-sistemático/não-diversificável (β_{As})	O indicador de risco sistemático/não-diversificável (<i>beta</i>) deve ser inferior ao máximo almejado.	Equação (13)
---	---	--------------

Fonte: Elaboração própria.

Ao elaborar ambos os modelos e seus conjuntos de restrições, os autores reconhecem a existência de padrões distintos no crescimento das empresas nascentes, os quais afetam o crescimento das receitas de vendas, tais como (METRICK; YASUDA, 2010; ROBBIE; WRIGHT, 1997): crescimento inicial (ano 1 e 2), crescimento acelerado (ano 3 e 4), maturação (ano 5) e declínio (ano 6 em diante). De modo a refletir tais considerações, os limites das restrições de liquidez e alavancagem variam de acordo com os anos, de modo a levar em conta as mudanças esperadas no ciclo de receitas das fases de crescimento. Os modelos foram implementados utilizando o Microsoft Excel, que tem o GRG como algoritmo para solução de problemas de otimização não-lineares.

4 APLICAÇÃO DO MODELO E RESULTADOS

Para a aplicação do modelo, parte-se das recomendações de Damodaran (2002) para avaliação de empresas emergentes, tendo em vista a projeção de fluxos de caixa descontados ao WACC, considerando uma taxa de sobrevivência ajustada para o tipo de empreendimento. No exercício de planejamento financeiro realizado neste trabalho, considera-se que, ao final do quinto ano (mês 60), os indicadores utilizados convergirão para as médias das empresas brasileiras de capital aberto que atuam no setor. Cabe mencionar que, no planejamento do crescimento das vendas de uma empresa emergente, a determinação da evolução do *market share* resulta de um exercício de planejamento do empreendedor e demais *stakeholders* interessados, o que parece razoável no âmbito de modelagem de negócios em empresas neste estágio de crescimento (LEACH; MELICHER, 2015). Para se determinar o tamanho do mercado, utilizou-se dados provenientes do levantamento anual da Associação Brasileira de Empresas de Software, a qual, no período de análise, estimou o tamanho do mercado de softwares e serviços no Brasil em R\$ 69 bilhões (ABES, 2015).

O custo do produto vendido e serviço prestado, despesas gerais e administrativas, despesas com vendas e outras despesas operacionais foram estimadas a partir de uma regressão linear utilizando-se as vendas como variável independente. Os dados provêm de um levantamento dos últimos 10 anos em empresas nacionais de capital aberto que operam no segmento de software e serviços, todas de divulgação pública. As equações estimadas são expostas na Tabela 2, o componente *m* compreende o mês.

Tabela 2 – Coeficientes de determinação e parâmetros da regressão para estimativa de custos e despesas

Variável Dependente	Coefficiente de Determinação (R^2)	Reta de Regressão
Custo do produto vendido e serviço prestado	0,9987	$0,3322 \times Vendas_m$
Despesas com vendas	0,9818	$0,067 \times Vendas_m$
Outras despesas operacionais	0,9848	$21.776 + 0,3316 \times Vendas_m$
Despesas gerais e administrativas	0,9298	$22.739 + 0,0473 \times Vendas_m$

Fonte: Elaboração própria com dados do Instituto Assaf (2018).

Para o cálculo dos investimentos, utilizou-se a abordagem empregada na avaliação da empresa americana Tesla, realizada por Cornell e Damodaran (2014), os quais, para tal, usaram a razão vendas/capital empregado. Os dados para cálculo do indicador foram extraídos dos

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

demonstrativos das empresas TOTVS e LINX, duas empresas de capital aberto com operações em outros países e significativa representatividade no mercado brasileiro. Tal relação vendas/capital empregado varia conforme as etapas de mudança no *market-share* da firma, desta forma incorporando os efeitos das diferentes etapas do ciclo de crescimento da empresa, conforme apresentado na Tabela 3.

Tabela 3: Evolução do Market-Share e da taxa de investimento no período de avaliação explícita e na perpetuidade.

Período	Market-Share	Taxa de Crescimento das Receitas (Mensal)	$\left(\frac{\text{Vendas}}{\text{Capital Empregado}}\right)$
1° até o início 3° ano	0,33%	5,65%	7,44
3° até o final 4° ano	1%	2,15%	8,94
5° até início do 6° ano	1,67%	1,67%	1,88
6° ano	2%	0,72%	Conforme depreciação
Perpetuidade	1,83%	-	Conforme depreciação

Fonte: Elaboração própria.

Em relação ao capital próprio aportado, aplicou-se o percentual médio de capital próprio na estrutura de capital da TOTVS, uma vez que esta empresa atua no mercado nacional desde 2003 e, portanto, já passou por todos os estágios de crescimento mencionados anteriormente. Neste trabalho, considerou-se apenas uma rodada de aporte de capital próprio no patrimônio líquido da empresa. O modelo pode ser facilmente adaptado para incorporar diferentes aportes de capital próprio pelos investidores.

Outros indicadores como prazo médio de recebimento das vendas, pagamento das compras, de estoque, pagamento de impostos, alíquota marginal de imposto de renda, dentre outros, foram baseados no comportamento das duas empresas nacionais mencionadas. O cálculo do custo da dívida de curto prazo e o custo do capital próprio, necessários para o cálculo do WACC, seguiram recomendações de Damodaran (2014) e, especificamente para as características do mercado brasileiro, por Neto, Lima e Araújo (2008). Indicadores necessários para o cálculo vieram da base de dados de empresas brasileiras de capital aberto e da base de dados de empresas de capital aberto de mercados emergentes¹. Para o custo da dívida de longo prazo, utilizou-se como referência a média dos últimos 12 meses das taxas de juros praticadas pelo BNDES. Os termos do endividamento de curto prazo presumem amortização da dívida e pagamento dos juros dentro de doze meses e de cento e vinte meses para a dívida de longo prazo. Ambos os financiamentos de curto e de longo prazo não presumem período de carência para a dívida. Os valores dos custos da dívida obtidos no momento da avaliação foram de 14,85% a.a. para o crédito de curto prazo e 6,7% a.a. para o de longo prazo. Todas estas premissas são parametrizadas como dados de entrada, podendo ser modificadas em função de novas circunstâncias da empresa, do mercado e da conjuntura econômica em vigor.

Foram inseridas restrições que permitam à empresa capitalizar-se tão somente de recursos de terceiros de curto prazo nos meses 1, 4, 7 e 10 de cada ano e, para empréstimos de longo prazo, somente no primeiro mês do ano 3 e do ano 5. Obviamente, o modelo permite alterar essas restrições, as quais refletem aqui os momentos mais tipicamente vinculados a mudanças no padrão de crescimento das vendas que suscitem alterações na sua estrutura de capital (TITMAN; WESSELS, 1988). Todas as restrições referentes ao quinto ano têm como limite médias setoriais, pois supõe-se uma convergência a esta quando a organização estiver

¹ Respectivamente, <<http://www.institutoassaf.com.br>> e <<http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>>. Ambos endereços eletrônicos foram acessados em 20/2/2018.

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

em estágio maduro. Portanto, assumir-se-á que a empresa na perpetuidade tenderá a convergir sua estrutura de capital para os valores médios do setor (TITMAN; WESSELS, 1988).

A taxa de crescimento do fluxo de caixa livre na perpetuidade foi de 6,98% a.a. Vale recordar que a taxa de crescimento dos fluxos de caixa da firma na perpetuidade pode ser determinada pelo produto entre o Retorno sobre o Capital Empregado (ROCE) e a taxa de reinvestimento dos fluxos de caixa (DAMODARAN, 2002), os quais correspondem a valores médios de empresas de software e serviços entre 2005 e 2015 para o mercado nacional e mercados emergentes, respectivamente. O valor do WACC para desconto dos fluxos de caixa livres perpétuos refere-se ao último mês de avaliação explícita (mês 72).

Como se trata de empresas emergentes com risco tecnológico, de mercado e financeiro maiores que os de empresas maduras, deve-se considerar um ajuste que reflita a menor taxa de sobrevivência dessas empresas, como sugerem Damodaran (2002) e Leach e Melicher (2015). Tal ajuste, chamado taxa de sobrevivência, foi obtido a partir de dados do SEBRAE (2013). Sob a ótica do acionista, o valor ajustado para sobrevivência advém da multiplicação da probabilidade de sobrevivência pelo valor da empresa para o acionista. Este último é o valor presente dos fluxos de caixa livres da empresa deduzidos da dívida (curto e longo prazo) e dos passivos contingentes (METRICK; YASUDA, 2010).

Após as simulações, as quais ofereceram valores de partida distintos para o algoritmo de otimização, a melhor convergência mostrou um montante total de juros pagos de R\$ 35 milhões no Modelo 1 e de R\$ 158 milhões no Modelo 2, com todas as restrições satisfeitas. A Tabela 4 e a Tabela 5 resumem os valores determinados pelo modelo e o resultado das restrições dos respectivos modelos.

Tabela 4: Despesas financeiras e montantes da dívida.

		Modelo 1	Modelo 2
Total Juros Pagos (despesas financeiras)		35.378.928	149.418.610
Ano 1	Dívida - CP Mês 7	131.548.361,77	131.544.945
Ano 2	Dívida - CP Mês 1	43.285.031,57	45.489.998
Ano 3	Dívida - LP Mês 1	70.048.256,20	422.846.474
Ano 5	Dívida - LP Mês 1	57.828.174,27	432.934.453

Nota: CP – Curto Prazo; LP – Longo Prazo. Os meses em que não houve tomada de empréstimo foram ocultados.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A despeito da semelhança, nos montantes adquiridos de empréstimos de curto prazo e, dos períodos os quais estes foram tomadas pelos modelos, observa-se, na Tabela 4, um montante de juros pagos e empréstimos de longo prazo tomados pelo Modelo 2 substancialmente maiores do que no Modelo 1. Isso ocorre por conta do benefício fiscal dos juros, tornando a dívida de longo prazo menos custosa que o capital próprio, o que diminui o WACC, conseqüentemente elevando o valor da empresa (FAMA; FRENCH, 2004). Ainda, a empresa terá como consequência o aumento do seu valor por elevar o capital de terceiros em sua estrutura desde que seu Retorno sobre Capital Empregado seja superior ao custo do endividamento (MODIGLIANI; MILLER, 1963), o que ocorre neste caso. A restrição de alavancagem (Tabela 1) visa incorporar implicitamente as condições de incerteza quanto ao risco proveniente de um maior endividamento em uma empresa emergente, o qual pode comprometer a solvência da empresa sob a ótica dos investidores.

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

Para o Modelo 1, somente a restrição de caixa para o sétimo mês do primeiro ano e os primeiros meses do segundo e do quinto ano são atuantes. Para o Modelo 2, as restrições atuantes foram as de alavancagem máxima para o sexto ano e o caixa mínimo do sétimo mês do primeiro ano. Quanto às demais restrições, pode-se afirmar que os modelos não só as satisfizeram, como proporcionaram situação de folga àquelas exigidas

A Tabela 5 apresenta os valores de cada restrição nos pontos ótimos determinados pelos modelos e a proporção de capital de terceiros em cada ano.

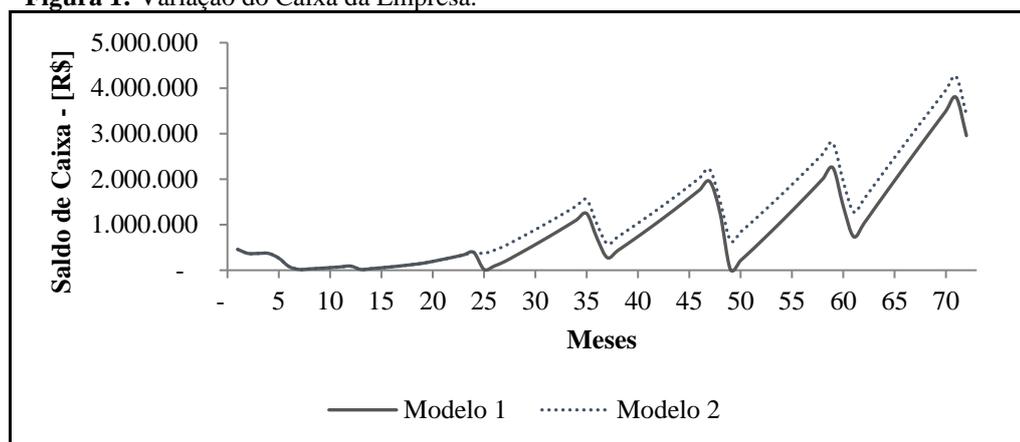
Tabela 5: Valores obtidos para as restrições dos modelos e proporção de capital de terceiros.

Restrição	Modelo 1	Modelo 2	Valor exigido
Liquidez corrente (ano 2)	3,84	3,84	2,00
Liquidez corrente (ano 4)	4,06	4,39	2,57
Liquidez corrente (ano 5)	3,97	4,40	2,14
Liquidez corrente (ano 6)	4,90	5,27	2,61
Alavancagem (ano 2)	0,22%	0,22%	2%
Alavancagem (ano 4)	1,69%	9,68%	30%
Alavancagem (ano 5)	2,25%	14,15%	20%
Alavancagem (ano 6)	1,59%	10,00%	10%
β (Final do ano 5)	1,36	1,42	1,81
% Capital de Terceiros (ano 1)	8,92%	8,69%	-
% Capital de Terceiros (ano 2)	0,22%	0,22%	-
% Capital de Terceiros (ano 3)	2,52%	13,24%	-
% Capital de Terceiros (ano 4)	1,66%	8,83%	-
% Capital de Terceiros (ano 5)	2,20%	12,67%	-
% Capital de Terceiros (ano 6)	1,57%	9,09%	-

Fonte: Elaborado pelos autores.

A Figura 1 ilustra a oscilação do caixa de ambos os modelos ao longo do horizonte de planejamento explícito, cujo valor mínimo exigido foi de R\$ 17,158 milhões.

Figura 1: Variação do Caixa da Empresa.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Conforme se nota na Figura 1, as quedas bruscas de caixa durante o período de avaliação, geralmente no início de cada ano, vêm em decorrência do pagamento anual dos

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

impostos e de dividendos. Observa-se que o Modelo 2 possui mais folga de caixa que o Modelo 1, uma vez que o Modelo 2 toma mais dívida de longo prazo, mais barata que a de curto prazo, a fim de usufruir dos benefícios já mencionados do aumento da dívida na estrutura de capital. No entanto, a maior disponibilidade de caixa no Modelo 2 ocorre somente após o 24º mês, pois o empréstimo de longo prazo está sendo tomado apenas no 25º mês de operação do negócio. Face às restrições impostas, ambos os modelos apresentaram resultados satisfatórios em termos de adequação ao desempenho setorial médio ao fim do horizonte explícito de planejamento que antecede a fase de perpetuidade.

O valor da empresa para o acionista para ambos os modelos é apresentado na Tabela 6, junto à relação entre valor da empresa e capital empregado.

Tabela 6: Valor do capital próprio antes e após ajuste de sobrevivência (R\$)

Valores obtidos pelo <i>valuation</i>	Antes do ajuste de sobrevivência	Após o ajuste de sobrevivência	$\left(\frac{\text{Valor da empresa}}{\text{Capital Empregado}}\right)^*$
Modelo 1	5.686.983.856	3.980.888.699	12,43/8,70
Modelo 2	5.812.230.833	4.068.561.583	12,70/8,89

Fonte: Elaborado pelos autores.

* Os primeiros valores referem-se ao indicador utilizando o valor da empresa sem o ajuste de sobrevivência, enquanto o segundo considera o ajuste.

Como esperado, o maior valor ao acionista apresentado pelo segundo modelo é acompanhado de uma elevação do risco sistemático (β) devido a maior alavancagem financeira. Para fins de comparação, uma análise de 1.140 negócios cujo período de desinvestimento por parte dos investidores já ocorreu (ABVCAP, 2021b) mostrou que, em média, a razão entre valor da empresa e capital investido² de empresas ligadas ao setor de tecnologia foi de 8,3 (com máximo de 455). Isto é, o capital investido foi multiplicado por 8,3 vezes. Na aplicação do presente trabalho (ver Tabela 6), esse valor é de 12,4 (para o Modelo 1) e 12,7 (para o Modelo 2) e, considerando o ajuste de sobrevivência, 8,7 (para o Modelo 1) e 8,89 (para o Modelo 2). Ainda, há de se reforçar que os valores obtidos são coerentes com as premissas de avaliação utilizadas, que podem ser livremente alteradas de acordo com a realidade e percepções dos empreendedores e investidores em outras aplicações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propôs dois modelos de decisão baseados em programação não-linear cujo foco foi a tomada de decisão em orçamentação de capital em empresas emergentes de base tecnológica. Tal qual discutido anteriormente, optar por um ou outro modelo é uma estratégia que depende não somente da aversão ao risco do gestor e dos investidores, mas também de fatores que afetam o retorno esperado de um empreendimento desta natureza, tais como a certeza e a magnitude dos fluxos de caixa esperados. Ainda, é importante ressaltar que tais considerações e resultados advêm de suposições comportamentais e de mercado que levaram a essa formulação ao âmbito da otimização. Portanto, a suposição fundamental, que pode comprometer a aplicabilidade dos resultados obtidos, assume que aportes de capital próprio e de terceiros estarão disponíveis para financiar as fases seguintes do ciclo de desenvolvimento da empresa estudada. Como discutimos na revisão da literatura, as dificuldades de financiamento de empresas novas não são poucas. Ainda, identificação e realização de uma boa oportunidade de negócios constituem um exercício interativo de alto nível que não se limita ao

² Também chamado de Múltiplo do Capital Investido (MOIC).

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

empreendedor e a seus *stakeholders* diretos, mas também ao ambiente no qual tais interações se manifestam.

Dois aspectos importantes derivam dos resultados obtidos neste trabalho. Quando as empresas trabalham na perspectiva de minimização de riscos, estas tendem a adotar posturas mais conservadoras em relação ao uso de capital de terceiros, pelo medo de assumir uma obrigação fixa frente a possibilidade de não concretização das projeções realizadas. Neste caso, a estrutura econômico-financeira obtida dentro das restrições impostas deve ser aquela fornecida pelo modelo de minimização das despesas financeiras. Obviamente, este viés mais conservador tem seu preço, pois impacta o valor do negócio vis-à-vis o segundo modelo. Por outro lado, ao se priorizar a maximização do valor, a estrutura de capital é selecionada com base no segundo modelo, tendo como papel principal a minimização do WACC. Todavia, o aumento do valor e, conseqüentemente, do retorno, é acompanhado por maior nível de endividamento, o que pode aumentar as chances de insolvência caso os fluxos de caixa projetados não se materializem tal qual planejado. De modo geral, a aderência a um ou a outro modelo dependerá da estrutura de preferências e do grau de aversão ao risco dos gestores, sócios, fundos de VC e demais credores, assim como a perspectiva de que os fluxos de caixa previstos reflitam situações plausíveis e condizentes com uma proposição de valor alinhada ao modelo de negócios do empreendimento.

A principal limitação do estudo consistiu na decisão quanto a certos parâmetros de entrada provenientes de dados setoriais, macroeconômicos e de recomendações da literatura, alguns dos quais sofrendo variações de acordo com a fase correspondente ao seu ciclo de vida. Entretanto, é necessário destacar que quaisquer premissas utilizadas como entrada podem ser alteradas.

Como forma de testar a validade deste modelo em outros empreendimentos, sugere-se que novos trabalhos considerem tanto o GRG quanto outros algoritmos de programação matemática na resolução de problemas semelhantes. Assim, contribui-se a um debate mais amplo sobre eficiência no planejamento econômico-financeiro em empresas emergentes, sobretudo em mercados como o brasileiro. Portanto, espera-se que este trabalho possa incentivar um melhor entendimento das práticas de orçamentação de capital em empresas emergentes de base tecnológica com limitadas opções para financiar seu crescimento de modo sustentado.

REFERÊNCIAS

ABES. **Mercado brasileiro de software: Panorâma e tendências [Brazilian Software Market: Panorama and Tendencies]**. Associação Brasileira de Software. São Paulo. 2015.

ABVCAP. **Consolidação de Dados 2021: Anos Base: 2011-2020**. Associação Brasileira de Private Equity e Venture Capital. São Paulo, p. 43. 2021a.

ABVCAP. **Performance of Brazilian Private Equity and Venture Capital Deals**. Associação Brasileira de Private Equity e Venture Capital. São Paulo, p. 18. 2021b.

ACKOFF, R. L. Resurrecting the Future of Operational Research. **The Journal of the Operational Research Society**, v. 30, n. 3, p. 189-199, 1979.

ALMEIDA, H.; CAMPELLO, M. Financing Frictions and the Substitution between Internal and External Funds. **Journal of financial and quantitative analysis**, p. p. 589–622, 2010.

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

- ARMOUR, J.; CUMMING, D. The legislative road to Silicon Valley. **Oxford Economic Papers**, v. 58, n. 4, p. 596–635, 2005.
- AURIOL, E. **Barriers to formal entrepreneurship in developing countries**. [S.l.]. 2013.
- BECK, A. **Introduction to nonlinear optimization: theory, algorithms, and applications with MATLAB**. Kfar Saba: Technion-Israel Institute of Technology, 2014.
- BERTSEKAS, D. **Nonlinear Programming**. 3^a. ed. Athenas: Athena Scientific, 2016.
- CARPENTER, R. E.; PETERSEN, B. C. Capital Market Imperfections, High-Tech Investment, and New Equity Financing. **The Economic Journal**, 112, n. 477, 2002. F54-F52.
- CARPENTIER, J.; ABADIE, J. Generalization of the Wolfe Reduced Gradient method in the case of non-linear constraints. **Optimization**, London, v. 37, p. 37-47, 1969.
- CASELLI, S. **Private Equity and Venture Capital in Europe: Markets, Techniques, and Deals**. Burlington, MA: Academic Press, 2010.
- CHAN, L. K. C.; LAKONISHOK, J.; SOUGIANNIS, T. The Stock Market Valuation of Research and Development Expenditures. **The Journal of Finance**, v. LVI, p. 2431-2456, 2001.
- CORNELL, B.; DAMODARAN, A. Tesla: Anatomy of a Run-Up. **The Journal of Portfolio Management**, v. 41, n. 1, p. 139-151, 2014.
- CRESSY, R. Funding gaps: a symposium. **Economic Journal**, v. 447, p. F1-F16, 2002.
- DAMODARAN, A. **Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset**. 2^a. ed. Danvers: John Wiley & Sons, 2002.
- DAMODARAN, A. **Applied Corporate Finance**. 4^a. ed. Danvers: John Wiley & Sons, 2014.
- DAVILA, A.; FOSTER, G.; GUPTA, M. Venture capital financing and the growth of startup firms. **Journal of Business Venturing**, v. 18, n. 6, p. 689-702, jul. 2002.
- DE NEGRI, F.; RAUEN, A. T. **Innovation Policies in Brazil during the 2000s: the need for new paths**. Brasília-DF. 2018.
- DURAND, D. The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment. **American Economic Association**, v. 49, n. 4, p. 639-655, 1959.
- FAMA, E.; FRENCH, K. The Capital-Asset-Pricing-Model: Theory and Evidence, 18, n. 3, 2004. 25-46.
- GOMPERS, P. A.; LERNER, J. The Use of Covenants: An Empirical Analysis of Venture Capital Agreements. **The Journal of Law & Economics**, 39, n. 2, 1996. 463-498.
- GOMPERS, P. et al. Venture capital investment cycles: The impact of public markets. **Journal of Financial Economics**, v. 87, n. 1, p. 1-23, 2008.
- GRAHAM, J. R.; CAMPBELL, R. H. The Theory and Practice of Corporate Finance: evidence from the field. **Journal of Financial Economics**, 60, 2001. 187-243.
- GRILLI, L.; MURTINU, S. Government, venture capital and the growth of European high-tech entrepreneurial firms. **Research Policy**, v. 43, p. 1523–1543, 2014.

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

- HALKOS, G. E.; TZEREMES, N. G. Industry performance evaluation with the use of financial ratios: An application of Bootstrapped DEA. **Expert Systems with Applications**, 39, 2012. 5872-5880.
- HAMILTON, R. T.; FOX, M. A. The financing preferences of small firm owners. **International Journal of Entrepreneurial Behavior & Research**, p. p. 239 - 248, 1998.
- HEALY, P. M.; PAPELU, K. G.; BERNARD, V. L. **Business Analysis & Valuation: Using financial statements**. 3^a. ed. Boston: Cengage Learning, 2003.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introduction to Operations Research**. 10th. ed. Boston: McGraw Hill, 2015.
- HOLMES, S.; KENT, P. An Empirical Analysis of the Financial Structure of Small and Large Australian Manufacturing Enterprises. **The Journal of Entrepreneurial Finance**, p. p. 141-154, 1991.
- HOLTHAUSEN, R. W.; ZMIJEWSKI, M. E. **Corporate Valuation: Theory, Evidence and Practice**. Charlotte, NC: CBP Press, 2014.
- HUBBARD, R. Capital Market Imperfections and Investment. **Journal of Economic Literature**, v. 36, p. 193-225, 1998.
- INSTITUTO ASSAF. Demonstrações financeiras das companhias, 2018. Disponível em: <<https://www.institutoassaf.com.br/>>. Acesso em: 20 fev. 2018.
- JACKSON, R. H. F.; MULVEY, J. M. A Critical Review of Comparisons of Mathematical Programming Algorithms and Software (1953- 1977). **JOURNAL OF RESEARCH of the Notional Bureau of Standards**, v. 6, p. 563-584, 1978.
- JOGLEKAR, N. R.; LEVESQUE, M. Marketing, R&D, and Startup Valuation. **IEEE Transactions on Engineering and Management**, 56, n. 2, 2009. 229-242.
- KOPLIN, H. T. The profit maximization assumption. **Oxford Economic Papers**, 15, n. 2, 1963. 130-139.
- LARSON, A. L.; GIFFIN, P. E. Revenue vs. profit maximization: comment. **Southern Economic Journal**, 46, n. 4, 1980. 1221-1223.
- LEACH, J. C.; MELICHER, R. W. **Entrepreneurial Finance**. Fourth. ed. Stamford, OH: Cengage Learning, 2015.
- LEE, R. P.; GREWAL, R. Strategic responses to new technology and their impact on firm performance. **Journal of Marketing**, v. 68, p. 157-171, 2004.
- LEMMON, M. L.; ZENDER, J. F. Debt Capacity and Tests of Capital Structure Theories. **Journal of financial and quantitative analysis**, p. p. 1161-1187, 2010.
- LERNER, J.; HARDYMON, F.; LEAMON, A. **Venture Capital & Private Equity: A Casebook**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012.
- LERNER, J.; LEAMON, A.; HARDYMON, F. **Venture Capital, Private Equity and the Financing of Entrepreneurship**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012.
- MERT, M. What does a firm maximize? A simple explanation with regard to economic growth. **International Journal of Engineering Business Management**, 10, 2018. 1-13.

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

- METRICK, A.; YASUDA, A. **Venture capital and the finance of innovation**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 2010.
- MODIGLIANI, F.; MILLER, M. H. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. **The American Economic Review**, p. 261-297, 1958.
- MODIGLIANI, F.; MILLER, M. H. Corporate income taxes and the cost of capital: a correction. **The American economic review**, v. 53, n. 3, p. 433-443, 1963.
- NETO, A. A.; LIMA, F. G.; ARAÚJO, A. M. P. Uma proposta metodológica para o cálculo do custo de capital no Brasil [a methodological approach for the calculation of the cost of capital in Brazil]. **Revista de Administração**, v. 43, n. 1, p. 72-83, jan./fev./mar. 2008.
- OECD. **OECD Keynote Paper for SME Financing Gap: Theory**. Paris. 2006.
- OECD. **OECD Science, Technology and Industry Outlook: Comparative performance of national science and innovation systems**. [S.l.]. 2019.
- PHILOSOPHOV, L. V.; BATTEN, J. A. Predicting the event and time horizon of bankruptcy using financial ratios and the maturity schedule of long-term debt. **Mathematical Finance Journal**, 1, 2008. 181-212.
- PINTO, K. E. F.; FELDMANN, P. R. Why Brazil Doesn't Innovate: a Comparison Among Nations. **Revista de Administração e Inovação**, v. 13, n. 1, p. 63-82, 2016.
- PROBERT, J.; CONNELL, D.; MINA, A. R&D service firms: The hidden engine of the high-tech economy. **Research Policy**, v. 42, p. 1274-1285, 2013.
- RAMSHINGHANI, M. **The Business of Venture Capital**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2014.
- ROBB, A. M.; ROBINSON, D. T. The capital structure decisions of new firms. **Review of Financial Studies**, v. 27, n. 1, p. 153-179, jan. 2014.
- ROBBIE, K.; WRIGHT, M. **Venture capital**. New York: Dartmouth Publishing, 1997.
- SCHERR, F. C.; SUGRUE, T. F.; WARD, J. B. Financing the Small Firm Start-Up: Determinants of Debt Use. **The Journal of Entrepreneurial Finance**, p. p. 17-36, 1993.
- SCHIANTARELLI, F. Financial Constraints and Investment: a critical review of methodological issues and international evidence. In: PEEK, J.; ROSENGREEN, E. **Is Bank Lending Important for the Transmission of Monetary Policy**. Boston: Federal Reserve Bank, 1995. p. 177-214.
- SEBRAE. **Sobrevivência das empresas no Brasil [Survival of Firms in Brazil]**. SEBRAE – Serviço de Apoio às Micro e Pequenas Empresas. Brasília. 2013.
- SOLOW, R. M. Some implications of alternative criteria for the firm. In: MARRIS, R.; WOOD, A. **The Corporate Economy**. London: Palgrave Macmillan, 1971. p. 318-342.
- STANCILL, J. M. How much money does your new venture need? **Harvard Business Review**, v. 64, n. 3, p. 59-70, mai/jun 1986.
- STIGLER, G. J. Perfect competition, historically contemplated. **Journal of Political Economy**, 65, n. 1, 1957. 1-17.

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

TITMAN, S.; WESSELS, R. The determinants of capital structure choice. **The Journal of finance**, v. 43, n. 1, p. 1-19, mar. 1988.

VILLA, A.; ANTONELLI, D. **A Road Map to the Development of European SME Networks - towards collaborative innovation**. London: Springer, 2009.

WILTBANK, R. et al. Prediction and control under uncertainty: Outcomes in angel investing. **Journal of Business Venturing**, v. 24, n. 2, p. 116-133, nov. 2009.

ZIDER, B. How Venture Capital Works. **Harvard Business Review**, v. 76, n. 6, p. 131-139, 1998.

APÊNDICE 1: ESPECIFICAÇÃO DO MODELO E DAS VARIÁVEIS

Função objetivo Z_d de minimização das despesas financeiras (Modelo 1).

$$\min Z_d = \sum_{t=1}^2 \sum_{j=1}^{72} K_{ti} \left[\rho_t E_{tj} - \sum_{k=1}^{\rho_t} \sum_{m=j}^{j+k} A_{tjm} \right] \begin{cases} \text{se } m = 01, 02, \dots, 12 \quad \therefore i = 1 \\ \text{se } m = 13, 14, \dots, 24 \quad \therefore i = 2 \\ \text{se } m = 25, 26, \dots, 36 \quad \therefore i = 3 \\ \text{se } m = 37, 38, \dots, 48 \quad \therefore i = 4 \\ \text{se } m = 49, 50, \dots, 60 \quad \therefore i = 5 \\ \text{se } m = 61, 62, \dots, 72 \quad \therefore i = 6 \end{cases} \quad (2)$$

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

Função objetivo Z_v de maximização do valor presente dos fluxos de caixa livres da empresa (Modelo 2).

$$\max Z_v = \sum_{m=1}^{72} \frac{[EBIT(1-T)]_m - I_m - \Delta NCG_m + D_m}{\left\{ 1 + \left[\frac{CP_m}{CP_m + \sum D_m^t} (R_f + \beta_U \left[1 + \frac{\sum D_m^t}{CP_m} (1-T) \right] [(R_M - R_f) + \alpha_{BR}]) + \sum_{t=1}^2 \left(\frac{D_m^t}{CP_m + \sum D_m^t} K_{ti} (1-T) \right) \right] \right\}^m} + \left[\frac{\left(\frac{\{[EBIT(1-T)]_{72} - I_{72} - \Delta NCG_{72} + D_{72}\} (1 + g_{FCL})}{\left[\frac{CP_m}{CP_m + \sum D_m^t} (R_f + \beta_U \left[1 + \frac{\sum D_m^t}{CP_m} (1-T) \right] [(R_M - R_f) + \alpha_{BR}]) + \sum_{t=1}^2 \left(\frac{D_m^t}{CP_m + \sum D_m^t} K_{ti} (1-T) \right) \right] - g_{FCL}} \right)}{\left(1 + \left[\frac{CP_m}{CP_m + \sum D_m^t} (R_f + \beta_U \left[1 + \frac{\sum D_m^t}{CP_m} (1-T) \right] [(R_M - R_f) + \alpha_{BR}]) + \sum_{t=1}^2 \left(\frac{D_m^t}{CP_m + \sum D_m^t} K_{ti} (1-T) \right) \right] \right)^{72}} \right] \quad (3)$$

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

Conjunto de restrições aplicáveis a ambos os modelos.

$$FC_{m-1} + R_m - (C_m + DO_m + F_m + I_m) + \sum_{t=1}^2 E_{(j=m)t} + CP_m - \left\{ \sum_{t=1}^2 \sum_{j=1}^{m-1} K_{ti} \left[E_{jt} - \sum_{k=j}^{m-1} A_{tjk} \right] \right\} - \sum_{t=1}^2 \sum_{j=1}^{m-1} A_{tj} - IR_A - Div_A \geq$$

$$FC_{min} \quad \forall m = 1, 2, \dots, 72 \quad (4)$$

$$\frac{1}{PC_1 + \left\{ \sum_{m=13}^{24} \{ (CMV_m - F_m) \} + IR_{(i=2)} + \sum_{j=13}^{24} [E_{j(t=1)} - \sum_{k=j}^{12} A_{jk(t=1)}] \right\} - \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=13}^{24} A_{jk(t=1)} - IR_1}$$

$$\times \left(\sum_{m=13}^{24} \left\{ R_m - (C_m + DO_m + F_m + I_m) + CP_m + (V_m - R_m) + (Est_{m-1} + C_m + P_m - CMV_m) + (I_m - DP_m) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{t=1}^2 \sum_{j=13}^{24} \left[E_{tj} - K_{ti} \left[\rho_t E_{tj} - \sum_{k=1}^{\rho_t} \sum_{m=j}^{j+k} A_{tjm} \right] - \sum_{k=1}^{\rho_t} \sum_{m=j}^{j+k} A_{tjm} \right] - IR_1 \right\} + AC_1 \right) \geq LC_2 \quad (5)$$

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{PC_3 + \left\{ \sum_{m=37}^{48} \{ (CMV_m - F_m) \} + IR_{(i=4)} + \sum_{j=37}^{48} [E_{j(t=1)} - \sum_{k=j}^{48} A_{jk(t=1)}] \right\} - \sum_{j=1}^{36} \sum_{k=37}^{48} A_{jk(t=1)} - IR_3} \\
 & \times \left(\sum_{m=37}^{48} \left\{ R_m - (C_m + DO_m + F_m + I_m) + CP_m + (V_m - R_m) + (Est_{m-1} + C_m + P_m - CMV_m) + (I_m - DP_m) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{t=1}^2 \sum_{j=37}^{48} \left[E_{tj} - K_{ti} \left[\rho_t E_{tj} - \sum_{k=1}^{\rho_t} \sum_{m=j}^{j+k} A_{tjm} \right] - \sum_{k=1}^{\rho_t} \sum_{m=j}^{j+k} A_{tjm} \right] - IR_3 \right\} + AC_3 \right) \geq LC_4
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{PC_4 + \left\{ \sum_{m=49}^{60} \{ (CMV_m - F_m) \} + IR_{(i=5)} + \sum_{j=49}^{60} [E_{j(t=1)} - \sum_{k=j}^{60} A_{jk(t=1)}] \right\} - \sum_{j=1}^{48} \sum_{k=49}^{60} A_{jk(t=1)} - IR_4} \\
 & \times \left(\sum_{m=49}^{60} \left\{ R_m - (C_m + DO_m + F_m + I_m) + CP_m + (V_m - R_m) + (Est_{m-1} + C_m + P_m - CMV_m) + (I_m - DP_m) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{t=1}^2 \sum_{j=49}^{60} \left[E_{tj} - K_{ti} \left[\rho_t E_{tj} - \sum_{k=1}^{\rho_t} \sum_{m=j}^{j+k} A_{tjm} \right] - \sum_{k=1}^{\rho_t} \sum_{m=j}^{j+k} A_{tjm} \right] - IR_4 \right\} + AC_4 \right) \geq LC_5
 \end{aligned} \tag{7}$$

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{PC_5 + \left\{ \sum_{m=61}^{72} \{ (CMV_m - F_m) \} + IR_{(i=6)} + \sum_{j=61}^{72} [E_{j(t=1)} - \sum_{k=j}^{72} A_{jk(t=1)}] \right\} - \sum_{j=1}^{60} \sum_{k=61}^{72} A_{jk(t=1)} - IR_5} \\
 & \times \left(\sum_{m=61}^{72} \left\{ R_m - (C_m + DO_m + F_m + I_m) + CP_m + (V_m - R_m) + (Est_{m-1} + C_m + P_m - CMV_m) + (I_m - DP_m) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{t=1}^2 \sum_{j=61}^{72} \left[E_{tj} - K_{ti} \left[\rho_t E_{tj} - \sum_{k=1}^{\rho_t} \sum_{m=j}^{j+k} A_{tjm} \right] - \sum_{k=1}^{\rho_t} \sum_{m=j}^{j+k} A_{tjm} \right] - IR_5 \right\} + AC_5 \right) \geq LC_6
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\sum_{t=1}^2 \sum_{j=1}^{24} [E_{jt} - \sum_{m=j}^{24} A_{jtm}]}{\sum_{m=1}^{24} ACP_m + \text{Lucros Reinvestidos}_m} \leq \text{Alavancagem}_{m\acute{a}x_2} \tag{9}$$

$$\frac{\sum_{t=1}^2 \sum_{j=1}^{48} [E_{jt} - \sum_{m=j}^{48} A_{jtm}]}{\sum_{m=1}^{48} ACP_m + \text{Lucros Reinvestidos}_m} \leq \text{Alavancagem}_{m\acute{a}x_4} \tag{10}$$

$$\frac{\sum_{t=1}^2 \sum_{j=1}^{60} [E_{jt} - \sum_{m=j}^{60} A_{jtm}]}{\sum_{m=1}^{60} ACP_m + \text{Lucros Reinvestidos}_m} \leq \text{Alavancagem}_{m\acute{a}x_5} \tag{11}$$

$$\frac{\sum_{t=1}^2 \sum_{j=1}^{72} [E_{jt} - \sum_{m=j}^{72} A_{jtm}]}{\sum_{m=1}^{72} ACP_m + \text{Lucros Reinvestidos}_m} \leq \text{Alavancagem}_{m\acute{a}x_6} \tag{12}$$

$$\beta_U \left[1 + \frac{\sum_{t=1}^2 \sum_{j=1}^{72} [E_{jt} - \sum_{m=j}^{72} A_{jtm}]}{\sum_{m=1}^{72} ACP_m + \text{Lucros Reinvestidos}_m} (1 - T) \right] \leq \beta_{As} \tag{13}$$

Modelo em Programação Não-Linear para Decisão
de Orçamentação de Capital em *Startups*

Tabela 7: Apresentação das variáveis utilizadas no Modelo 1 e no Modelo 2.

Variável	Descrição
T	Alíquota de imposto de renda;
A_{tjm}	Amortizações de curto ou longo prazo referentes a um empréstimo tomado em um mês j e pagas durante os meses subsequentes ($j + 1; j + 2; \dots; j + \rho$), até o fim do período de amortização. Note que não há amortizações pagas no mês de tomada do empréstimo, logo $A_{tjm} (m = j)$ é igual a zero para qualquer t e j ;
ACP_m	Aporte de capital próprio realizado em um mês m ;
Lucros Reinvestidos_m	Lucros gerados no exercício do mês m e reinvestidos, isto é, incorporados ao patrimônio líquido como forma de financiamento dos ativos.
CP_m	Montante de capital próprio no mês m . O somatório dos aportes próprios e lucros reinvestidos nos meses de 1 até m representam, de forma equivalente, o valor de CP_m ;
C_m	Compras realizadas no mês m ;
CMV_m	Custo da mercadoria vendida no mês m ;
DP_m	Depreciação do mês m ;
DO_m	Despesas Operacionais do mês m ;
Div_A	Dividendos pagos sobre o lucro líquido do ano A ;
E_{tj}	Empréstimos de curto ou longo prazo tomados em um mês qualquer, dos 72 meses projetados;
Est_{m-1}	Estoque inicial do mês m ;
F_m	Fornecedores no mês m , isto é, parcela do custo da mercadoria vendida paga naquele período;
IR_A	Imposto de renda gerado no ano A , porém pago no ano $A + 1$;
β_{As}	Indicador de risco não-diversificável (<i>beta</i>) da empresa, incluindo o efeito da alavancagem da dívida;
β_U	Indicador de risco não-diversificável (<i>beta</i>) da empresa, excluindo o efeito da alavancagem da dívida. Normalmente corresponde ao beta do setor;
I_m	Investimentos realizados no mês m ;
ρ_t	Tempo de amortização (em meses) dos empréstimos de curto ($t = 1$) e longo prazo ($t = 2$);
P_m	Produção do mês m ao valor de custo. No caso da organização analisada representa o custo da mercadoria vendida;
R_m	Receitas obtidas pelas vendas em um mês m ;
R_M	Retorno esperado de uma carteira teórica de ativos negociados no mercado acionário (principal índice da Bolsa de Valores);
α_{BR}	Risco do país, neste caso, o Brasil (<i>Country Default Spreads</i>)
D_m	Saldo devedor no mês m . $\sum D_m^t$ representa, portanto, o somatório do saldo devedor dos empréstimos de curto ($t = 1$) e longo ($t = 2$) prazos;
K_{ti}	Taxa de juros de curto ou longo prazo projetada para o mês, a qual pode variar conforme o ano de referência (i) e o tipo de empréstimo (t);
R_f	Taxa de juros livre de risco;
ΔNCG_m	Varição da necessidade de capital de giro de um mês m .
V_m	Vendas totais do mês m ;