

ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA BASEADA EM MODELAGEM MATEMÁTICA

STRATEGY FOR TEACHING AND LEARNING MATHEMATICS BASED ON
MATHEMATICAL MODELING

ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS
BASADAS EN MODELOS MATEMÁTICOS

Joyce do Nascimento Oliveira

Gilvane Barroso de Lima

Anna Karla Barros da Trindade

Francisco de Paula Santos de Araújo Junior

RESUMO

Este estudo traz uma abordagem sobre a modelagem matemática como estratégia de melhoria no ensino-aprendizagem. Para tanto, desenvolveu-se uma pesquisa exploratória, cujos dados foram adquiridos através de uma pesquisa bibliográfica e de campo, e a análise se deu através de uma abordagem qualitativa. Na pesquisa percebeu-se que por meio de uma aula com metodologia diferenciada, como no caso do uso da modelagem matemática, os alunos conseguem absorver melhor os conteúdos, pois fazem a relação do mesmo na prática, entendendo assim, sua utilização no cotidiano e que se torna válido a utilização da modelagem matemática como metodologia eficiente, que traz resultados satisfatórios dentro do ensino-aprendizagem da disciplina de matemática, pois leva o aluno a ter contato direto com o assunto desenvolvido com o contexto vivido por ele, ajudando a assimilar o conhecimento repassado.

ABSTRACT

This study presents an approach on mathematical modeling as an improvement strategy in teaching-learning. For that, an exploratory research was developed, whose data were acquired through bibliographic and field research, and the analysis took place through a qualitative approach. In the research it was noticed that through a class with different methodology, as in the case of the use of mathematical modeling, students are able to better absorb the contents, as they relate it in practice, thus understanding its use in everyday life and that it becomes valid to use mathematical modeling as an efficient methodology, which brings satisfactory results within the teaching-learning of the discipline of mathematics, as it leads the student to have direct contact with the subject developed with the context he experienced, helping to assimilate knowledge passed on.

RESUMEN

Este estudio presenta un enfoque sobre modelado matemático como una estrategia de mejora en la enseñanza-aprendizaje. Para ello, se desarrolló una investigación exploratoria, cuyos datos fueron adquiridos a través de investigaciones bibliográficas y de campo, y el análisis se realizó a través de un enfoque cualitativo. En la investigación se observó que a través de una clase con una metodología diferente, como en el caso del uso de modelos matemáticos, los estudiantes pueden absorber mejor los contenidos, porque lo relacionan en la práctica, entendiendo así su uso en la vida cotidiana y que se hace válido el uso del modelado matemático como una metodología eficiente, que trae resultados satisfactorios dentro de la enseñanza-aprendizaje de la disciplina de las

matemáticas, ya que lleva al estudiante a tener contacto directo con el tema desarrollado con el contexto experimentado por él, ayudando a asimilar el conocimiento transmitido

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem; Aluno; Modelagem matemática.

Keywords: Teaching-learning; Student; Mathematical modeling.

Palabras-clave: enseñanza-aprendizaje; Alumno; Modelado matemático.

INTRODUÇÃO

A educação atualmente tem sido modificada devido uma série de recursos tecnológicos que têm surgido como forma de contribuir com o ensino, porém, ainda torna-se necessário que os professores busquem metodologias que venham colaborar no incentivo do estudo e proporcionar maior aprendizagem aos discentes, isto porque muitos estão acostumados a transmitir os conhecimentos de forma mecânica e desestimulante, e, por conseguinte, ocorre uma grande defasagem devido à forma tradicional de dar aulas contrárias às necessidades do mundo moderno. No entanto, percebe-se que hoje muitos professores buscam se capacitar e procuram novas formas de melhorar o processo de ensino e aprendizagem, visando melhorar a qualidade das suas aulas, como também adotam estratégias que levam os alunos a tornar-se críticos e questionadores, traçando assim, novos caminhos para ultrapassar as dificuldades existentes. Segundo Clebesch (2007, p. 1):

Na velocidade que as coisas estão mudando é nosso dever pensar um pouco mais para onde estamos indo e levando conosco nossos estudantes. Precisamos sair da toca. Não somos mais apenas professores. Somos, também analistas de tendências. E isso é muito estimulante. Devemos entender melhor o mundo para dialogarmos melhor com ele. [...] Deixemos nossas tocas. Quem hiberna são os ursos. Muitos deles, aliás, estão ameaçados de extinção.

Portanto, devido às mudanças que vêm ocorrendo no cenário educacional, é de suma importância que o docente se aperfeiçoe e que esteja em constante formação, buscando atender a todos os critérios indispensáveis para uma boa formação de seus alunos, bem como buscando adentrar no mundo dele, para que assim, consiga realizar um trabalho no qual a aprendizagem venha acontecer de fato.

No que concerne ao ensino de matemática, percebe-se que os discentes não são incentivados a pensar, a refletir e a fazerem a diferença nesse processo como sujeitos ativos, o que mais se vê são alunos tratados como depósitos das informações que lhe são transmitidas, de forma mecânica, no qual o ato de decorar fórmulas, gráficos, tabelas, entre outros, torna-se comum e usual, devido à metodologia repassada pelo docente.

O ensino de matemática devido à metodologia utilizada por alguns docentes, em muitos casos tem sofrido alguns problemas, como o desinteresse dos alunos que por consequência traz reprovações. Isso ocorre devido à resistência de alguns professores em utilizar estratégias novas, trabalhando apenas por meio do tradicionalismo, porém percebe-se que quando é inserido estratégias novas o cenário muda, pois cada conteúdo ministrado ganha sentido para o discente.

Dentre as estratégias novas que podem ser trabalhadas nas aulas de matemática, a modelagem, contribui de forma significativa, pois os conhecimentos são postos em prática de forma a esclarecer a realização dos problemas e situações presentes nas atividades.

Nesse contexto, há a necessidade do professor entender que ele é um formador de opinião e não apenas um transmissor de informações. Dentro desta visão, a Modelagem Matemática é considerada um método de ensino e aprendizagem cujo propósito é fazer com que o educando assimile melhor o conteúdo matemático, deixando de ser um sujeito passivo para ser ativo no processo de aprendizagem, adquirindo o conhecimento de forma eficaz.

Conforme Cifuentes e Negrelli (2007), um modelo matemático é considerado uma representação de um recorte da realidade ou mesmo de uma situação problema realizado através de hipóteses e aproximações simplificadoras através da linguagem matemática.

Diante do estudo sobre a modelagem matemática como estratégia no processo de ensino e aprendizagem elencam-se as seguintes hipóteses para análise: O ensino de matemática realizado de forma tradicional, não desperta interesse no aluno, pois não o estimula à prática, dessa forma, buscar estratégias novas que deem significado aos conteúdos muda a visão do discente sobre a disciplina; Trabalhar nas aulas de matemática com modelagem facilita a concretização dos conteúdos e os alunos aprendem mais; O uso de exemplos específicos e que fazem parte do contexto dos alunos trabalhados por modelagem tornam-se mais prazerosos.

Portanto, este estudo visa ressaltar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, cuja finalidade é contribuir com o ensino da disciplina. Assim, será estabelecida uma avaliação das várias etapas da Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem dentro dos pressupostos da Didática dando como exemplo, a despoluição de um lago.

Neste contexto, a temática em questão gera o seguinte questionamento que deverá ser respondido mediante a realização da pesquisa buscando atingir os objetivos elencados para ela. Assim, a problemática é a seguinte: Como a modelagem matemática pode ser utilizada como estratégia de melhoramento no ensino-aprendizagem?

Portanto, o desenvolvimento dessa pesquisa visou atingir como objetivo geral: Analisar como a modelagem matemática pode ser utilizada como estratégia de melhoramento no ensino-aprendizagem.

Já os objetivos específicos serão: Entender o que é modelagem matemática; identificar como a modelagem matemática contribui positivamente no ensino-aprendizagem da disciplina e exemplificar a modelagem matemática por meio do local e conteúdo matemático P.A, P.G e Logaritmos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção faz uma abordagem sobre o conceito de modelagem matemática por meio da visão de alguns teóricos acerca da temática, enfatizando também esse tipo de metodologia dentro do ensino-aprendizagem de matemática, como estratégia de melhoramento do ensino.

O que é modelagem matemática

O Ensino de matemática tem exigido dos docentes maneiras diferenciadas de trabalhar os conteúdos, para que os alunos consigam adquirir o conhecimento proposto. Sendo assim, Trindade (2018, p.3) afirma que:

[...] um caminho de orientação para o ensino da matemática é proporcionar aos alunos problemas que os motivem buscar situações da sua realidade social, colocando em prática sua reflexão no que se trata do estudo da matemática.

Nesse sentido, quando o professor consegue fazer a relação entre o conteúdo ministrado, com o contexto vivido pelo aluno, a aprendizagem poderá ocorrer de forma mais direta e fácil, pois o discente fará a assimilação daquilo que está sendo repassado de forma prática no seu dia a dia.

Várias são as estratégias que podem ser utilizadas para melhorar as aulas de matemática, dentre elas, a modelagem matemática que contribui de forma significativa. Segundo Bassanezi (2004, p.24):

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Dessa forma, percebeu-se que a modelagem matemática por ser um processo dinâmico, traz uma nova visão de como se trabalhar modelos matemáticos, trazendo a realidade vivida pelos discentes por meio de problemas matemáticos e a solução destes é trabalhada e interpretada por através de uma linguagem acessível a todos, sendo assim, torna-se eficaz dentro do ensino de matemática.

Neste contexto Bassanezi (2004, p.24) ainda defende que a “Modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos sempre elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”. Portanto, notou-se que ao se trabalhar a matemática por meio da modelagem, deve-se buscar exemplos da realidade do aluno para que este entenda mais facilmente, pois é criado um sentido concreto a ele, podendo a mesma ser utilizada em vários contextos reais, pois contribui para melhor esclarecimento de determinados fenômenos.

Segundo Araújo (2002, p.12-13), “modelo é uma representação simplificada de uma situação concreta feita com o objetivo de compreender a situação e prever suas configurações futuras ou de situações semelhantes”. Assim, entende-se que a modelagem matemática se torna importante dentro do estudo matemático, pois facilita a visualização de uma situação problema real através de uma linguagem matemática.

Na visão de Bean (2009, p. 2) sobre modelagem matemática:

A modelagem é uma atividade humana na qual uma parte da realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente. O cerne da modelagem reside no recorte e na formulação de um isolado, ou seja, na conceitualização de

um fenômeno com fundamento em premissas e pressupostos que remetem tanto ao fenômeno quanto aos objetivos do modelador.

Dessa forma, percebe-se que o conceito de modelagem matemática está ligado diretamente à realidade, porém sendo esta vista de forma criativa e simplificada, mediante a um objetivo específico pré-determinado, como também em seu estudo de forma isolado para que se possa entender determinados problemas de forma mais facilitada.

No desenvolvimento da modelagem matemática, há a necessidade de se construir um modelo matemático, que conforme Trindade (2018, p. 9):

Um modelo matemático é uma interpretação simplificada da realidade, baseado em uma estrutura de conceitos mentais e experimentais. Para estudarmos um determinado fenômeno com grau de complexidade maior, criam-se vários modelos, sendo utilizados praticamente em todas as áreas.

Portanto, através da modelagem, o pesquisador saberá se suas hipóteses estão certas ou erradas em relação a uma determinada problemática, seguindo etapas que são indispensáveis nesse processo.

A modelagem matemática no ensino-aprendizagem de matemática

Sabe-se que trabalhar a matemática de forma pura e sem contexto, pode trazer vários prejuízos ao ensino. Tal fato pode ser observado historicamente, pois segundo Trindade (2008, p.5):

O ensino da Matemática, em meados do séc. XIX se mostrava com grande dificuldade por conta da abordagem utilizada ser a da Matemática Pura e só no final do séc. XIX, uma nova tendência começava a surgir onde o foco era valorizar as aplicações da Matemática em todos os ramos das ciências naturais e técnicas, assim como seu significado na vida.

Assim, pode-se perceber um avanço, pois os conteúdos matemáticos puderam ser assimilados na vida dos educandos, de maneira que eles começaram a entender a proposta direcionada em cada conhecimento, e, assim, aprender de fato. Nesse sentido, esse tipo de metodologia, na qual se utilizam modelos do contexto real para entender o conteúdo da disciplina de matemática, se torna válido dentro do processo de ensino-aprendizagem.

Na realização de um ensino por meio da modelagem deve-se seguir uma sequência lógica, essa afirmação é reforçada nos estudos de Bassanezi (2004) que ressalta que a Modelagem Matemática de uma situação problema real deve seguir uma sequência de etapas de maneira simples.

Para Bassanezi (2004, p.27) as etapas da modelagem matemática são: a experimentação, na qual se processa a obtenção dos dados; a abstração, cujo objetivo é a formulação dos Modelos Matemáticos; a resolução, que é obtida quando se substitui as hipóteses por respostas coerentes; a validação, que se refere a um processo de aceitação ou não dos modelos propostos, nos quais os modelos são testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com valores obtidos no sistema real; e a modificação, que

é o momento que deve-se mudar aquilo que não deu certo no modelo, reformulando-os.

Na utilização da modelagem matemática, alguns argumentos podem ser utilizados a favor. Em seu estudo Bassanezi (2004), elenca alguns dos argumentos de natureza formativa: desenvolvendo capacidades e atitudes críticas, criativas, e explorativas; crítica: preparando o aluno para a vida real e formador de opiniões; utilidade: aprendendo a fazer da matemática um instrumento para a resolução de seus problemas em diversas situações reais; intrínseca: pois a fornece ao estudante uma forma mais eficiente de entender e interpretar a própria matemática em seus exemplos cotidianos; e aprendizagem: possibilitando um melhor entendimento dos argumentos matemáticos, assimilação de conceitos e resultados, e valorização da disciplina.

Bassanezi (2004) ainda ressalta alguns obstáculos que podem ser encontrados na utilização da modelagem matemática, dentre eles: instrucionais, pois os cursos regulares têm programas que devem necessariamente ser cumpridos e a modelagem, por ter um processo um tanto longo interromperiam os mesmos; ideológicos, por acreditarem que a matemática é algo intocável que não tem relacionamento algum com o contexto sócio-cultural e político; costume arraigado, quando o aluno acostuma-se a ter o professor como um depósito de informações que lhes são transmitidas de maneira mecânica e objetiva sem nenhuma participação do dele em sala de aula nesse processo, podendo dificultar o novo método; formação heterogênea da classe; as vezes também o tema escolhido para a modelagem pode não ser motivador para todos causando desinteresse por parte de alguns; e o professor pode não se sentir capacitado para desenvolver modelagem, tanto por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrar em situações desconfortáveis ligadas a resoluções em áreas que desconhecem.

METODOLOGIA

Para a realização deste estudo cujo objetivo é analisar como a modelagem matemática pode ser utilizada como estratégia de melhoramento no ensino-aprendizagem, o tipo de pesquisa selecionado para a realização deste, quanto aos objetivos, foi a pesquisa exploratória que segundo GIL (2007) é realizada para trazer maior interação do pesquisador com o objeto de estudo, buscando averiguar as hipóteses relacionadas, como também envolve um estudo bibliográfico e de campo como forma de atingir os objetivos determinados.

Quanto aos procedimentos para coleta de dados, primeiramente foi realizado por meio da pesquisa bibliográfica que Fonseca (2002, p.32) ressalta que:

A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém, pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta.

Mediante a pesquisa bibliográfica foi produzido um referencial teórico que trouxe o embasamento teórico necessário para fundamentação do projeto, pois se baseia no pensamento de autores que entendem do assunto. Entre os principais autores a serem trabalhados ressaltam-se: Araújo (2002), Bassanezi (2004), Bean (2009) e outros que trabalham com essa temática.

Já em relação à pesquisa de campo, Gil (2008) ressalta que esta procura o aprofundamento de uma realidade específica realizando uma observação direta das atividades do grupo selecionado para o estudo e da aplicação de testes com os sujeitos para captar as explicações e interpretações do que ocorrem naquela realidade.

ATIVIDADE EM SALA DE AULA

Esta seção ressalta acerca dos principais procedimentos realizados nas salas de aula selecionadas para a realização deste estudo. A seguir as atividades realizadas.

Aplicação do pré-teste

A análise ocorreu em duas turmas do Ensino Médio de forma comparativa, sendo que a turma A é composta por 20 alunos e a turma B, composta por 18 alunos. Nesse sentido, em primeiro plano foi realizado um pré-teste sobre P.A, P.G e logaritmos, conteúdos selecionados para este estudo, para que dessa maneira fosse diagnosticado o conhecimento das turmas acerca desses conteúdos.

Aula Tradicional

Em uma das turmas foram desenvolvidas aulas cuja metodologia selecionada foi a tradicional, ou seja, através de explicações expositivas com o acompanhamento do livro didático. As aulas tradicionais ocorreram na mesma sistemática realizada por Oliveira (2018, p. 23) quando descreve que:

A aula foi desenvolvida através de explicação conceitual de progressão geométrica e acompanhada do livro didático como material de apoio, utilização de exemplos de progressões geométricas, bem como do procedimento a ser aplicado para se determinar um termo de qualquer sequência que obedeça a essa regra, que é de multiplicar o termo inicial da sequência por um determinado valor, chamado de razão, para se formar o próximo termo, e o processo é repetido sempre se multiplicando o termo anterior pela razão para encontrar o próximo termo.

Nesse sentido, observa-se que não houve nenhum recurso diferenciado para a realização da aula, sendo nesse sentido, considerada aula monótona, ou seja, não há nada que desperte a curiosidade ou o prazer do aluno para querer se aprofundar no conteúdo, principalmente por este está longe da realidade vivida por ele.

Aula utilizando a modelagem matemática

Foi desenvolvido em uma das turmas, aulas sobre os conteúdos enfatizados por meio da metodologia alvo desse estudo, ou seja, através da

modelagem matemática. Inicialmente foi realizada uma conversa com os alunos acerca do que iria ser trabalhado e de como seria desenvolvida a prática selecionada. Dentre os principais pontos enfatizados na conversa foi em relação ao método de experimentação que iria ser realizado, comparando a despoluição real de um rio a um modelo similar que seria desenvolvido pelos alunos.

Nesse sentido, os materiais necessários para o desenvolvimento da aula foram: 03 (três) garrafas PET de dois litros, copos descartáveis de 200 ml e café preparado (diluído em água).

Para a realização da aula também foram destacadas para os alunos algumas informações de suma importância, como descreve Oliveira (2018, p. 24-25) quando realizou o mesmo modelo:

- Para a realização desta simulação, é necessário considerar que os organismos vivos do lago purificam $1/5$ (ou seja, 20%) da quantidade de poluente do lago, durante qualquer período de 24 horas.
- A quantidade inicial de poluente foi de 200 ml.
- O experimento consistiu em substituir água poluída por água limpa. A troca de água foi realizada, supostamente, a cada período de vinte e quatro horas.
 - Para tanto, dois copos de água poluída eram retirados do recipiente e substituídos por água limpa. Estes dois copos correspondiam a um quinto do volume total, pois no recipiente que simulou o lago foram colocados ao todo 10 copos de água com 200 ml.
- Embora o volume de água do lago continue o mesmo em cada etapa, o volume de poluente diminuiu sempre um quinto do restante da etapa anterior.
- A concentração de poluente na água é homogênea, ou seja, em qualquer parte do lago, a razão entre o volume de poluente e o volume total de água na parte tomada é a mesma. Por isso é necessário agitar bem a mistura inicial (água e café diluído).

As informações citadas pelo autor acima norteiam os caminhos a serem trilhados na realização do modelo matemático em destaque, ou seja, na simulação de uma despoluição de um lago. Assim, após dada as instruções com o auxílio de recurso didático e tecnológico, Datashow, os alunos foram encaminhados para a realização da simulação. A seguir a ilustração dos recipientes necessários e a explicação acerca da utilização dos mesmos.

Figura 1 - Recipientes.

Fonte: Matem@tica na pr@tica 2010.

As três garrafas PET de capacidade igual ou maior a 2litros tiveram os seus gargalos cortados para facilitar o processo de simulação e foram enumeradas de 1 a 3, como identificação de cada utilização de forma específica. A seguir a identificação de cada vasilhame utilizado.

Figura 2 - Recipiente com água límpida.

Fonte: Matem@tica na pr@tica 2010.

A figura acima representa o recipiente 2 representa a água límpida que será utilizada para realizar a simulação de despoluição do lago.

Figura 3 - Poluente.

Fonte: Matem@tica na pr@tica 2010.

A figura acima representa o recipiente 3, que foi misturado um copo (de 200 ml) de café (previamente preparado) junto a um litro de água, simulando assim, o poluente que será usado no lago.

Figura 4 - Lago modelo.

Fonte: Matem@tica na pr@tica 2010.

A figura acima representa o recipiente 1, que servirá como o lago-modelo, nele foram colocados 9 copos (de 200 ml cada) totalizando 1,8 L de água límpida (utilizando a água límpida do recipiente 2). Logo após, foi inserido um copo de 200 ml de poluente (recipiente 3).

A partir daí foi perguntado aos alunos quantas trocas eles achariam que seriam necessárias para que o rio se encontrasse despoluído, considerando a quantidade de poluente inferior a 0,5% do volume do lago final?

Sendo assim, percebe-se alguns alunos que tentaram fazer cálculos, uns opinaram, outros ficaram calados, pois se encontravam tímidos. As reações observadas foram diferenciadas, todavia notou-se que a maioria, mesmo aqueles que geralmente não participavam das aulas opinaram e arriscaram algumas respostas, demonstrando dessa maneira positividade no método realizado.

Passando para a matematização do processo, buscou-se primeiramente concluir qual valor corresponderia a 0,5% do volume do lago. Sendo assim, o seguinte cálculo matemático foi realizado, segundo Oliveira (2018, p.30):

$$\begin{aligned} &\text{Volume do lago} = 200 \text{ ml} \\ 100 &\text{-----} 2000 \\ 0,5 &\text{-----} x \\ 100x &= 1000 \\ 1000 & \\ x &= \frac{\quad}{100} \\ x &= 10 \text{ ml} \end{aligned}$$

Realizado o cálculo detectou-se que a quantidade buscada se referia a 10 ml. Assim, após a realização da primeira troca foi dado início a uma nova etapa da modelagem, ou seja, a realização dos registros matemáticos da experiência, necessários para a elaboração de um modelo, com o auxílio do docente que é de suma importância para evitar erros no processo.

Assim, foram registrados os dados das 5 (cinco) primeiras trocas, simulando os cinco primeiros dias de despoluição de um lago.

Figura 8 – Registro dos cálculos.

Períodos de 24 horas (n)		Quantidade de poluente no recipiente ($a(n)$)
1º período	$n = 1$	200
2º período	$n = 2$	$200 - \frac{1}{5} \cdot 200 = 160$
3º período	$n = 3$	$160 - \frac{1}{5} \cdot 160 = 128$
4º período	$n = 4$	$128 - \frac{1}{5} \cdot 128 = 102,4$
5º período	$n = 5$	$102,4 - \frac{1}{5} \cdot 102,4 = 81,92$

Fonte: Matem@tica na pr@tica 2010.

Além do mais, os registros foram realizados de uma outra maneira, como observados a seguir:

Quadro 1 - Registro de outra forma.

Períodos de 24 horas (n)		Quantidade de poluente no recipiente a(n) em ml	Registrando de outra forma.
1º período	n = 1	200	$a(1) = 200$
2º período	n = 2	$200 - (1/5).200 = (4/5).200 = 160$	$a(2) = (4/5).a(1)$
3º período	n = 3	$160 - (1/5).160 = (4/5).160 = 128$	$a(3) = (4/5).a(2)$ $a(3) = (4/5).(4/5).a(1)$ $a(3) = (4/5)^2.a(1)$
4º período	n = 4	$128 - (1/5).128 = (4/5).128 = 102,4$	$a(4) = (4/5).a(3)$ $a(4) = (4/5).(4/5)^2.a(1)$ $a(4) = (4/5)^3.a(1)$
5º período	n = 5	$102,4 - (1/5).102,4 = (4/5).102,4 = 81,92$	$a(5) = (4/5).a(4)$ $a(5) = (4/5).(4/5)^3.a(1)$ $a(5) = (4/5)^4.a(1)$

Fonte: Oliveira (2018)

Por meio da construção da equação recursiva observa-se que:

$$a(1) = 200 \text{ mL}$$

$$a(2) = (1 - \frac{1}{5})a(1) = (4/5)a(1)$$

$$a(2) = (4/5)a(1) = 160 \text{ mL}$$

$$a(3) = (4/5)a(2) = (4/5)(4/5)a(1) = (4/5)^2 a(1) = 128 \text{ mL}$$

$$a(4) = (4/5)a(3) = (4/5)(4/5)^2 a(1) = (4/5)^3 a(1) = 102,4 \text{ mL}$$

$$a(5) = (4/5)a(4) = (4/5)(4/5)^3 a(1) = (4/5)^4 a(1) = 81,92 \text{ mL}$$

Fonte: Oliveira (2018)

$$a(n) = (4/5) \cdot a(n-1) = (4/5) \cdot (4/5)^{n-2} a(1) = (4/5)^{n-2+1} a(1) = (4/5)^{n-1} a(1)$$

Logo $a(n)$ pode ser encontrado de duas formas:

$$a(n) = (4/5) \cdot a(n-1)$$

$$\hat{a}(n) = (4/5)^{n-1} a(1)$$

Por meio do cálculo matemático acima, os alunos observaram que a quantidade de poluente poderia ser encontrada sem necessidade de realizar todas as trocas, através de uma equação geral para determinar a quantidade de poluente ao final de qualquer dia.

A partir daí passou-se para a etapa de validação, ou seja, o modelo passa por testes para se entender se há a possibilidade de acontecer o que ocorreu em um lago no decorrer dos tempos. Sendo assim, testando o modelo calculando a quantidade de poluente no sexto dia:

$$a(n) = (4/5)^{n-1} a(1)$$

$$a(6) = (4/5)^{6-1} \cdot 200$$

$$a(6) = (4/5)^5 \cdot 200$$

$$a(6) =$$

$$(0,32768)$$

$$\cdot 200 \quad a(6) =$$

$$65,536 \text{ ml}$$

Através do mesmo método usado para calcular para todos os dias na sequência, o mesmo valor será obtido:

$$a(6) = (4/5) \cdot a(5)$$

$$a(6) = (4/5) \cdot$$

$$81,92$$

$$a(6) = 65,536$$

$$\text{ml}$$

Através das observações, percebe-se que o modelo funciona, sendo assim a aplicação da fórmula geral consegue responder a questão inicial. Sendo assim, se 0,5% do volume do lago equivalem a 10 ml, portanto para que o lago seja considerado despoluído torna-se necessário que a quantidade de poluente no 14º dia seja inferior a 10 ml.

Fazendo o cálculo:

$$a(n) = (4/5)^{n-1} a(1)$$

$$a(14) = (4/5)^{14-1} \cdot 200$$

$$a(14) = (4/5)^{13} \cdot 200$$

$$a(14) =$$

$$(0,05497) \cdot 200$$

$$a(14) = 10,994$$

$$\text{ml}$$

Os alunos chegaram a uma conclusão de que o lago ainda não estaria despoluído, mediante os critérios estabelecidos pelo enunciado do problema, pois ainda não teria uma quantidade de poluente inferior a 10 ml, todavia estaria bem próximo dessa quantidade. Percebeu-se que outros alunos, de maneira mais definitiva, declararam que seria necessário apenas mais um dia para que se concluísse a despoluição do lago, sendo comprovado através do cálculo abaixo.

$$a(15) = (4/5)^{15-1} \cdot 200$$

$$a(15) = (4/5)^{14} \cdot 200$$

$$a(15) =$$

$$(0,04398) \cdot 200$$

$$a(15) = 8,796$$

$$\text{ml}$$

Mediante a resolução realizada sobre o problema em questão, foi relatado aos alunos que o assunto ao qual estavam trabalhando referia-se a uma progressão geométrica de primeiro termo 200 e a razão 4/5, sendo que a fórmula encontrada poderia ser usada para qualquer progressão geométrica.

Aplicação do pós-teste

Após o desenvolvimento das aulas, realizou-se outro teste para entender se a turma a qual ocorreram as aulas com modelagem se sobressaiu quanto ao rendimento, apontado por meio de um pós teste, da sala cujas aulas foram convencionais, para que dessa maneira se atingisse os objetivos propostos para esse estudo, bem como visando responder a problemática gerada.

Ao que se refere à abordagem escolhida para este estudo, selecionou-se a quantitativa, pois de acordo com Fonseca (2002) busca quantificar os resultados de forma numérica, principalmente quando as amostras são consideradas grandes, para que dessa forma, seja refletido um panorama verídico da realidade, atingindo a averiguação completa do problema. Sendo assim, devido o número de sujeitos escolhidos para essa análise, optou-se por quantificar os resultados, para dar uma visão ampla da realidade analisada.

Os dados adquiridos por meio do teste foram analisados e logo após foram relacionados com aquilo que os teóricos afirmam, visando atingir os objetivos e responder a problemática, observando se a metodologia adotada no estudo traz resultados satisfatórios para o ensino de matemática.

ANÁLISE DE DADOS

Os dados pertinentes a este estudo foram adquiridos por meio da pesquisa de campo realizada com alunos do 2º Ano do Ensino Médio, divididos em duas turmas A, composta por 20 alunos, e turma B, composta por 18 alunos, na qual a primeira foi desenvolvida um trabalho de forma convencional, já na segunda utilizou-se como metodologia a modelagem matemática.

Inicialmente foi feito um levantamento nas duas turmas selecionadas acerca do que os alunos entendiam sobre os conteúdos P.A, P.G e logaritmos, através

de um pré-teste contendo seis questões objetivas. A tabela apresenta os resultados desse pré-teste em relação a quantidade de acertos.

Tabela 1 - Quantidade de acertos no pré-teste da turma A

Quantidade de questões	Quantidade de alunos que acertaram
0 questão	00
01 questão	00
02 questões	09
03 questões	03
04 questões	08
05 questões	00
06 questões	00

Fonte: Própria do autor (2019)

Através dos dados inseridos na tabela, percebe-se que a turma A, possui um conhecimento mediano acerca dos conteúdos P.A, P.G e logaritmos, pois não existiram alunos que não acertaram nenhuma questão, estando os mesmos inclusos em acertos que variam de 02 a 04 questões. Sendo assim, nota-se que os alunos têm um conhecimento mesmo que superficial sobre os conteúdos ressaltados. A seguir, a tabela mostra os resultados da turma B em relação à quantidade de acertos no pré-teste.

Tabela 2 - Quantidade de acertos no pré-teste da turma B

Quantidade de questões	Quantidade de alunos que acertaram
0 questão	04
01 questão	06
02 questões	03
03 questões	03
04 questões	02
05 questões	00
06 questões	00

Fonte: Própria do autor (2019)

Por meio dos dados inseridos na tabela, observa-se que a turma B comparada a turma A é considerada inferior quanto à quantidade de alunos por acerto, ou seja, os alunos da turma B acertaram menos questões em relação a turma A, pois como pode ser visto, 04 alunos da turma B não acertaram nenhuma questão, algo que não foi visto na turma A, e a maioria de acertos da turma B foi de apenas 01 questão. Assim, percebe-se que os alunos da turma A possui maior conhecimento sobre os conteúdos selecionados para este estudo, sendo os mesmos P.A, P.G e logaritmos.

O fator observado acima reforça o que Trindade (2018) afirma, ou seja, que há a necessidade do docente buscar uma metodologia que consiga atingir os alunos, para que eles entendam o conteúdo, dentre elas, fazer a relação entre

o assunto ministrado, com o contexto vivido pelo discente, proporcionando uma aprendizagem mais direta e de fácil acesso.

Logo após a realização do pré-teste, a turma A recebeu do pesquisador uma aula diferenciada, ou seja, com modelagem matemática, destacando como modelo a despoluição de um lago. Assim, foram seguidos todos os procedimentos ou etapas para se chegar a um resultado e trabalhar de forma paralela os conteúdos P.A, P.G e logaritmos, como ressalta Bassanezi (2004) que a Modelagem Matemática de uma situação problema real deve seguir uma sequência de etapas de maneira simples.

Primeiramente foi feita a comparação de três recipientes ao contexto da realidade trabalhada, sendo o primeiro recipiente comparado ao modelo do lago a ser despoluído, o segundo sendo água límpida e o terceiro sendo os poluentes. Assim, inicialmente foi inserida no recipiente lago-modelo a água límpida, representando o lago com água sem poluição, logo após foi inserido do terceiro recipiente, ou seja, dos poluentes, no caso representado por café, comparando ao lago sendo poluído. Assim, deu-se início ao processo de despoluição do lago, sendo o mesmo representado em um período frequente de 24h, para que dessa forma fosse observado o que ocorre no processo de despoluição. Através desse modelo, pode ser inserido os conteúdos de P.A, P.G e logaritmos para que os alunos entendessem com mais facilidade a sua função dentro da disciplina de matemática.

Já a turma B, recebeu do pesquisador uma aula convencional ou tradicional, sem a presença de uma metodologia diferenciada, apenas se baseando em uma explicação direta e tradicional, trabalhando os conteúdos selecionados sem uma comparação ao contexto vivido pelos alunos.

Após a realização das aulas, foi desenvolvido um pós-teste através de uma avaliação contendo 05 questões objetivas como forma de entender se houve uma evolução maior na turma que foi trabalhada a modelagem matemática, ou se na turma cuja aula foi convencional. A seguir os resultados adquiridos no pós-teste inseridos na tabela abaixo.

Tabela 3 - Quantidade de acertos no pós-teste da turma A

Quantidade de questões	Quantidade de alunos que acertaram
0 questão	00
01 questão	00
02 questões	01
03 questões	10
04 questões	08
05 questões	01

Fonte: Própria do autor (2019)

Através dos dados inseridos na tabela, observa-se que comparado ao pré-teste há uma evolução em relação à quantidade de acertos conseguidos pelos alunos, pois por se tratar de apenas 05 questões, a proporção de acertos aumenta satisfatoriamente, estando concentrados principalmente entre 03 e 04 acertos. Sendo assim, verifica-se que por meio da aula com modelagem matemática os alunos puderam assimilar melhor os conteúdos abordados, bem como entender de forma prática a utilização dos mesmos no cotidiano. A seguir

a quantidade de acertos do pós-teste da turma B, cujo tipo de aula ministrado foi convencional ou tradicional.

Tabela 4 - Quantidade de acertos no pós-teste da turma B

Quantidade de questões	Quantidade de alunos que acertaram
0 questão	04
01 questão	10
02 questões	04
03 questões	00
04 questões	00
05 questões	00

Fonte: Própria do autor (2019)

Por meio dos dados inseridos na tabela, verifica-se que a turma B, cuja aula ministrada foi a convencional, não adquiriu uma evolução na quantidade de acertos, diminuindo ainda mais o seu rendimento, principalmente por não fazer sentido ao aluno, ou seja, não condizer com o seu contexto. Sendo assim, as aulas com modelagem matemática confirmam o que Bean (2009) ressalta, que a modelagem matemática está ligada diretamente à realidade e é vista de forma criativa e simplificada, mediante a um objetivo específico pré-determinado, como também em seu estudo de forma isolado para que se possa entender determinados problemas de forma mais facilitada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo cujo objetivo foi analisar como a modelagem matemática pode ser utilizada como estratégia de melhoramento no ensino-aprendizagem atingiu os objetivos propostos, no qual se percebeu que por meio de uma aula com metodologia diferenciada, os alunos conseguem absorver melhor os conteúdos, pois fazem a relação do mesmo na prática, entendendo assim, a sua utilização no cotidiano.

Por outro lado, quando se trabalha os conteúdos de maneira simplificada, ou mesmo sem uma metodologia que atraia o aluno, não há assimilação do conhecimento, fazendo com que os discentes não entendam os conteúdos e tenham um rendimento baixo, relacionado àqueles que tiveram uma aula diferenciada.

Mediante ao que foi observado, torna-se válida a utilização da modelagem matemática como metodologia eficiente e que traz resultados satisfatórios dentro do ensino-aprendizagem da disciplina de matemática, pois leva o aluno a ter o contato direto do assunto desenvolvido com o contexto vivido por ele, ajudando a assimilar o conhecimento repassado.

Portanto, fazer reflexões sobre essa temática contribui para futuras pesquisas na área. Nesse sentido, é indicado para acadêmicos de matemática, ou mesmo para todos os docentes e pessoas que tiverem interesse no assunto.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed. Contexto, 2004. 389 páginas.

BEAN, D. W. Modelagem: uma conceituação criativa da realidade. In: **Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto 4, 2009, Ouro Preto 4, Ouro Preto – MG**. Anais... Universidade Federal de Ouro Preto – Ouro Preto, abril 2009a. p. 90-104.

CIFUENTES, J. C., NEGRELLI, L. G. N. Modelagem Matemática e o método axiomático. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007. p.63-77.

CLEBESCH, J. Muito além do jardim. Disponível em: www.profissaomestre.com.br Acesso: 20 de maio de 2018.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

Gil, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social** / Antonio Carlos Gil. - 6. ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

_____. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MALAGUTTI, Pedro Luiz Aparecido. **Modelo de despoluição: módulo I**. -- Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010. -- (Matem@tica na pr@tica. (Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática).

OLIVEIRA, Francisco Elder Pereira. **A modelagem matemática como metodologia no ensino médio**. UESPI: Piri-piri, 2018.

TRINDADE, Anna Karla Barros da. **Modelagem matemática da população de Teresina e da dengue** / Anna Karla Barros da Trindade. – 2018.

ANEXO A: Imagens da aula com modelagem matemática



ANEXO B: PRÉ-TESTE PARA ALUNOS



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ.
 UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL – UAB / IFPI
 COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE
 MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO MODALIDADE A DISTÂNCIA

PRÉ-TESTE PARA ARTIGO – GILVANE BARROSO DE LIMA

- Este questionário é formado por 06 (seis) questões e visa avaliar a aprendizagem dos alunos.
- Por favor, não deixe questões em branco. Suas respostas ajudarão no alcance dos objetivos.
- Todas as questões devem ser respondidas respeitando o enunciado de cada uma.
- As questões objetivas coloquem os cálculos e as subjetivas marquem com um “X” a resposta correta.
- Muito Obrigado (a).

PRÉ-TESTE DE AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM

- 1) Numa P.A., calcule:
 - a) O 16º termo, sabendo que $a_1 = -10$ e $r = 3$.
 - b) A razão r , sabendo que $a_{15} = 82$ e $a_1 = 12$.
 - c) O número n de termos, sabendo que $a_n = 256$, $a_1 = 8$ e $r = 8$.
- 2) Um pêndulo, oscilando, percorre sucessivamente 18cm, 15cm, 12cm, A soma dos percursos até o repouso é:
 - a) 45cm b) 63cm c) 90cm d) 126cm 140cm.
- 3) Escreva uma P.G.:
 - a) De cinco termos em que $a_1 = 7$ e $q = 3$.
 - b) De quatro termos em que $a_n = 512$ e $a_1 = 8$.
- 4) Qual é a soma dos dez primeiros termos de uma P.G. na qual o 1º termo é $a_1 = 10$ e a razão é $q = 2$?
 - a) 10 230 d) 10 245
 - b) 10 235 e) 10 250
 - c) 10 240
- 5) A soma de $0,1 + 0,001 + 0,00001 + \dots$ é igual a:
 - a) 1
 - b) 0,09
 - c) 10^{-10}
 - d) $\frac{1}{5}$
 - e) $\frac{10}{99}$
- 6) (UFRN-RN Adaptada) Sabendo-se que $\log(AB) = 7$ e $\log \frac{A}{B} = 3$, pode-se concluir que o valor da expressão $(\log A)^2 - (\log B)^2$ é igual a:
 - a) 21
 - b) 4
 - c) 10
 - d) 40
 - e) 55

ANEXO C: PÓS-TESTE PARA ALUNOS



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
 INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ.
 UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL – UAB / IFPI
 COORDENAÇÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
 NO ENSINO MÉDIO MODALIDADE A DISTÂNCIA

PÓS-TESTE PARA ARTIGO – GILVANE BARROSO DE LIMA

- Este questionário é formado por 05 (cinco) questões e visa avaliar a aprendizagem dos alunos.
- Por favor, não deixe questões em branco. Suas respostas ajudarão no alcance dos objetivos.
- Todas as questões devem ser respondidas respeitando o enunciado de cada uma.
- Marque com um “X” apenas uma alternativa que representa a resposta.
- Muito Obrigado (a).

PÓS-TESTE DE AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM

- 1) Coloque P.A. para progressão aritmética e P.G. para progressão geométrica em cada sequência abaixo e marque a alternativa correta.
 - () (1, 3, 9, 27, 81)
 - () (15, 10, 5, 0, -5)
 - () (5, -10, 20, -40, 80, -160)
 - () (-17, -13, -9, -5, -1)
 - a) P.A, P.A, P.G, P.G.
 - b) P.G, P.A, P.A, P.G.
 - c) P.G, P.A, P.G, P.A.
 - d) P.A, P.G, P.A, P.G.
 - e) P.G, P.G, P.A, P.A.
- 2) (Udesc) O primeiro termo de uma progressão geométrica é 10, o quarto termo é 80; logo, a razão dessa progressão é:
 - a) 2 b) 10 c) 5 d) 4 e) 6
- 3) Segundo o IBGE, em 2007 a população Arapiraca (AL) era aproximadamente 200 000 habitantes. Essa população cresce anualmente em 2 800 habitantes. Supondo que a população dessa cidade cresça nesse mesmo ritmo, qual será a população daqui a 10 anos?
 - a) 210 200 habitantes.
 - b) 215 200 habitantes.
 - c) 220 200 habitantes.
 - d) 225 200 habitantes.
 - e) 230 200 habitantes.
- 4) (UCS) O valor de x para que a sequência $(x + 1, x, x + 2)$ seja uma P.G. é:
 - a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{-2}{3}$ d) $\frac{-1}{2}$ e) 3.
- 5) (U. E. LONDRINA) Supondo que exista, o logaritmo de “a” na base “b” é:
 - a) o número ao qual se eleva “a” para se obter “b”.
 - b) o número ao qual se eleva “b” para se obter “a”.
 - c) a potência de base “b” e expoente “a”.
 - d) a potência de base “a” e expoente “b”.
 - e) a potência de base 10 e expoente “a”