UMA TRANSFORMAÇÃO TRIGONOMÉTRICA VALIOSA

A VALUABLE TRIGONOMETRIC TRANSFORMATION

UNA VALORABLE TRANSFORMACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Pedro Antônio Soares Júnior

Edson do Nascimento de Oliveira

Paulo Roberto de Sousa Gomes

Resumo
Neste trabalho, apresentamos um estudo do papel Interdisciplinar de alguns conceitos Trigonométricos com ênfase em alguns tópicos da Física da primeira e segunda séries do Ensino Médio. Abordamos alguns conceitos trigonométricos básicos tais como: ângulos em radianos, arcos, relações trigonométricas no triângulo retângulo, lei do seno, lei do cosseno e funções trigonométricas, os quais são importantes ferramentas utilizadas na solução de alguns problemas de Física do Ensino Básico. Assim, apresentamos várias situações problemas que evidenciam o uso dos referidos conceitos.

Abstract
In this work, we present a study of the Interdisciplinary role of some Trigonometric concepts with an emphasis on some topics of Physics of the first and second series of High School. We approach some basic Trigonometric concepts such as: angles in radians, arcs, Trigonometric relations in the right triangle, sine law, cosine law and Trigonometric functions, which are important tools used in the solution of some Basic Education Physics problems. Thus, we present several problem situations that demonstrate the use of these concepts.

Resumen
En este trabajo, presentamos un estudio del papel interdisciplinario de algunos conceptos trigonométricos con énfasis en algunos temas de Física de la primera y segunda serie de High School. Nos acercamos a algunos conceptos trigonométricos básicos como: ángulos en radianes, arcos, relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, ley seno, ley coseno y funciones trigonométricas, que son herramientas importantes utilizadas en la solución de algunos problemas de física de educación básica. Por lo tanto, presentamos varias situaciones problemáticas que demuestran el uso de estos conceptos.

Palavras-chave: interdisciplinaridade. trigonometria. mecânica.
Keywords: interdisciplinarity. trigonometry. mechanics.
Palabras clave: interdisciplinariedad. trigonometría Mecánica

INTRODUÇÃO

Neste artigo, apresentamos um estudo do papel Interdisciplinar de alguns conceitos Trigonométricos, os quais são importantes ferramentas utilizadas na solução de determinados problemas de Física do Ensino Básico. Dessa forma, apresentamos algumas aplicações que evidenciam o uso dos referidos conceitos.

Para Lima (2014) a periodicidade é uma circunstância presente em quase tudo que nos cerca, desde o movimento de um planeta em torno do sol, ou de um elétron ao redor do núcleo, às batidas do coração. Nesse sentido, as funções Trigonométricas na Matemática e na Física, são ferramentas adequadas para descrever todos os fenômenos periódicos, principalmente depois que o matemático francês Joseph Fourier (em 1822), no seu estudo sobre transmissão de calor, que toda função pode ser, sob hipóteses bem razoáveis, ser obtida como soma de uma serie cujos os termos são senos e cossenos (“Serie de Fourier”).

Segundo Roque (2012) a Trigonometria foi uma criação da matemática grega, e recebeu contribuições de matemáticos de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus. Ela surgiu devido às necessidades de se medir distâncias inacessíveis, em problemas ligados a Navegação, Agrimensura e Astronomia.

Nesse sentido, o tratamento dos conteúdos matemáticos devem ter uma abordagem de conexões em que os diálogos sejam favorecidos e destacados, “O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, [...] ''(BRASIL, 2001, p. 19).

Desse modo, este artigo possui como tema central a aplicação do conhecimento Trigonométrico em problemas de Física, no sentido de familiarizar os professores dessas disciplinas, visto que os conceitos Trigonométricos são muito importantes para a Física, pois esta trabalha com grandezas angulares, grandezas vetoriais e Movimento Harmônico Simples (MHS) cujas equações cinemáticas são descritas por funções trigonométricas

Levando em conta os objetivos propostos, o presente artigo está dividido em: introdução, uma transformação trigonométrica valiosa, algumas aplicações à Física e as considerações finais.

UMA TRANSFORMAÇÃO TRIGONOMETRICA VALIOSA

De acordo com Neto (2010), há uma transformação trigonométrica muito útil na resolução de problemas na Física, o qual nos diz como proceder em problemas de uma soma de múltiplos constantes das funções seno e cosseno usando aplicação das formulas de adição de arcos. Para mais detalhes das funções trigonométricas o leitor poderá consultar Lima (2014) e Carmo (1992).

Toda expressão do tipo $a \operatorname{sen} x + b \cos x,$ com a e b reais, pode ser escrita na forma $\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x+\alpha)$ com $\sqrt{a^2+b^2}$ sendo um número real.

Demonstração:

Sempre que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pode –se fazer:

$$a \operatorname{sen} x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} senx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} cosx\right). \quad \textbf{(1)}$$

Como $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$, então existe um arco α de modo que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \textbf{(2)}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \textbf{(3)}$$

Considerando as equações (1), (2) e (3), temos:

ISSN 2675-1291| DOI: http://dx.doi.org/10.5935/encantar.v1.n3.008
Revista Encantar - Educação, Cultura e Sociedade - Bom Jesus da Lapa, v. 1, n. 3, p. 91-97, set./dez. 2019

$$a\ \operatorname{sen} x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\, senx + \operatorname{sen}\alpha\, cosx)$$
$$a\ \operatorname{sen} x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\, sen(x\ +\alpha) \qquad \textbf{(4)}$$

Portanto, a equação (4) permite calcular os valores de máximos e mínimos, apenas em função de a e b, não nulos, de qualquer expressão da forma $a\ \operatorname{sen} x + b\cos x$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen}(x\ +\alpha) \leq 1$ e $\sqrt{a^2+b^2} \geq 0$, temos:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x\ +\alpha) \leq \sqrt{a^2+b^2}$$
$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\ \operatorname{sen} x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2} \qquad \textbf{(5)}$$

Exemplo1

Determine o máximo e o mínimo da função $f(x) = senx + cosx$

Solução:

Comparando a função $f(x) = senx + cosx$ com a expressão padrão $a\operatorname{sen} x + b\cos x$, temos que se $a = b = 1$, então $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$. Usando o resultado da equação (**5)**, podemos escrever:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\ \operatorname{sen} x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$$
$$-\sqrt{1^2+1^2} \leq senx + cosx \leq \sqrt{1^2+1^2}$$
$$-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$$

Outra solução:

Como $a = b = 1$, usando o resultado da equação (1), vem:

$$f(x) = 1senx + 1cosx = \sqrt{1^2+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}senx + \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}cosx\right) \Rightarrow$$

$f(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}senx + \frac{\sqrt{2}}{2}cosx\right)$, sabendo que:

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$$

Podemos escrever:

$$f(x) = \sqrt{2}\, sen\left(\ x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Transformamos uma soma de seno e cosseno numa única expressão do tipo seno, uma vez que o valor máximo da função seno é 1 e mínimo no -1. Logo, a função $f(x)$ tem máximo, em $f(x) = \sqrt{2}$, e mínimo para $f(x) = \sqrt{2}.(-1) = -\sqrt{2}$.

ALGUMAS APLICAÇÕES Á FÍSICA

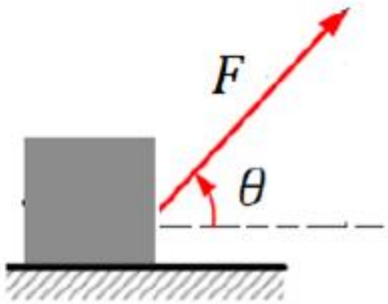
Apresentamos nessa seção algumas aplicações envolvendo os conceitos Trigonométricos e Físicos, a título de ilustração de um trabalho interdisciplinar de acordo com as recomendações dos parâmetros curriculares nacionais.

A força mínima para escorregar

Aplicação 1

(Neto, 2010, pag. 88) Uma caixa de massa m (figura 1), encontra-se apoiado sobre um plano horizontal áspero. O coeficiente de atrito entre o material da caixa e o plano vale μ . Se a gravidade no local vale g. Mostre que, a força mínima necessária para deslocar a caixa na direção horizontal, vale $F = \frac{\mu.m.g}{\sqrt{\mu^2+1}}$

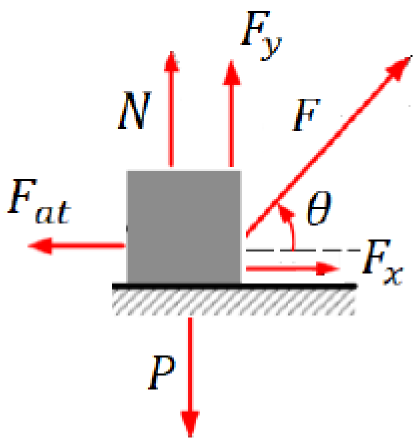
Figura 1: Força aplicada na caixa



Fonte: Próprio autor, (2018)

Solução:

Simbolizando as forças que atuam no bloco da figura 1, temos:



Na vertical,

$$N + F_y - P = 0 \Rightarrow N + Fsen\theta - P = 0 \Rightarrow N = Fsen\theta + P \qquad (6)$$

Na horizontal, na eminencia de escorregar, temos:

$$F_{at} = F_x = Fcos\theta \Rightarrow \mu . N = Fcos\theta \quad (7)$$

Substituindo a equação (6) em (7), obtemos:

$$\mu . (Fsen\theta + P) = Fcos\theta \Rightarrow F = \frac{\mu.P}{cos\theta + \mu sen\theta} \quad (8)$$

Seja a função $h(\theta) = cos\theta + \mu sen\theta,$ o denominador da equação (8) e usando a transformação trigonométrica dada na equação (4), podemos escrever:

$$h(\theta) = cos\theta + \mu sen\theta = \sqrt{1 + \mu^2}\, sen(\theta + \alpha). \quad (9)$$

Em (9), nos permite calcular o seu máximo e mínimo, Logo:

$$-\sqrt{1 + \mu^2} \leq \sqrt{1 + \mu^2}\, sen(\theta + \alpha) \leq \sqrt{1 + \mu^2}. \quad (10)$$

Substituindo a equação (9) na equação (8), vem:

$$F = \frac{\mu.P}{\sqrt{1 + \mu^2}\, sen(\theta + \alpha)} \quad (11)$$

A equação (11), representa o valor de F que torna iminente o escorregamento da caixa, com $\mu. P = \mu. m. g$ constantes, e denominador $\sqrt{1 + \mu^2}\, sen(\theta + \alpha)$. Assim, o menor valor de F ocorrerá quando tivermos o maior valor do denominador, desse modo, conforme a equação (10), o máximo de,
$h(\theta) = cos\theta + \mu sen\theta = \sqrt{1 + \mu^2}\, sen(\theta + \alpha)$, ocorre para $\sqrt{1 + \mu^2}$, portanto, podemos escrever:

$$F_{mím} = \frac{\mu. P}{\sqrt{1 + \mu^2}\, sen(\theta + \alpha)} = \frac{\mu. mg}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \blacksquare$$

O MHS e as funções trigonométrica

(Carmo, 1992, exercício 14, p. 66) Uma partícula se movimenta sobre o eixo das abscissas de modo que sua abscissa no instante t em segundos é,

$$x(t) = sen(\pi t) - \sqrt{3}cos(\pi t). \text{ (distância em metros)}$$

Mostre que o movimento da partícula é harmônico simples (MHS) e determine a amplitude, ângulo de fase, o período e a frequência deste movimento.

Solução:

Para mostrarmos que o movimento dessa partícula é um MHS basta transformarmos $x(t)$ em uma única função trigonométrica. Pois, segundo Calçada (1998), o Movimento Harmônico Simples (MHS) tem suas equações cinemáticas descritas por funções trigonométricas.

Usando a transformação trigonométrica da equação (4), temos:

$$x(t) = sen(\pi t) - \sqrt{3}cos(\pi t) = 2\,sen\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$x(t) = 2\,sen\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad (12)$$

Portanto o movimento da partícula é um MHS.

Segundo Alonso (1972) a amplitude é a maior distância que um corpo atinge ao sair do seu ponto de equilíbrio, que na função trigonométrica em (12) é representada por 2m.

Para Calçada (1998), a fórmula da equação horaria de um MHS da posição $x(t)$ no instante (t) com espaço angular φ (ângulo de fase), é dada por:

$$x(t) = A.\cos\varphi \qquad (13)$$

Onde $\varphi = (\varphi_0 + \omega t)$, com φ_0 a fase inicial que é encontrada para $t = 0$, e ω representado a velocidade angular.

Embora Calçada (1998) tenha representado a equação horaria do MHS em termos da função cossenoidal em (13), Alonso (1972) enfatiza que poderíamos ter utilizado uma função senoidal, como encontrada em (12), sendo que a única diferença seria de $\frac{\pi}{2}$ na fase inicia, Isso pelo fato de que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen x} \qquad (14)$$

desse modo, fazendo $x = \left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, e substituindo na equação (14), temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - \pi t\right) = \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right). \qquad (15)$$

Como a função cosseno é par, podemos escrever a equação (15), da forma:

$$\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad (16)$$

Substituindo (16) em (12), vem:

$$x(t) = 2\,sen\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$x(t) = 2\,\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad (17)$$

Comparando a equação (13) com (17), temos o ângulo de fase que será dado por

$$\varphi = \left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Assim, o período é:

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s$$

Logo, a frequência será:

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}5\ Hz$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os comentários acima visam nortear os professores de Matemática e Física do Ensino Médio em relação a importância, à posição de um estudo Interdisciplinar de alguns conceitos Trigonométricos com ênfase em alguns tópicos da Física.

Seguramente, a relação entre os conceitos Trigonométricos e Físicos são evidenciados, pois essas duas disciplinas trabalham com medições, unidades angulares e fenômenos periódicos.

Entretanto, a interdisciplinaridade sendo um instrumento didático que pode ser utilizado tanto pelo professor de Matemática como pelo professor de Física, representa, também, um desafio. A utilização das aplicações acima, por exemplo, possibilita acesso a uma variedade considerável de informações e o professor, por sua vez, precisa ter maestria em conduzir os trabalhos em sala.

Por fim, destacamos a importância de promover a interdisciplinaridade no sentido de contribuir e enriquecer com o ensino e aprendizagem dessas duas disciplinas.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M.; FINN. Física um curso universitário: Mecânica, São Paulo: Edgard Blucher, 1972.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2001.

CALÇADA, J.L.S. Física Clássica: óptica e ondas. São Paulo: Atual, 1998

CARMO, M.; MORGADO, A.; WAGNER, E. Trigonometria/Números Complexos. Rio de Janeiro: SBM, 1992

LIMA, E. L. Números e funções reais. Rio de Janeiro: SBM, 2014 (Coleção PROFMAT).

LIMA, E. L. Sobre a evolução de algumas ideias matemáticas: Logaritmos, Números complexos, Trigonometria. **Revista do Professor de Matemática**. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/6/1.htm> Acesso em: 27 jun. 2019.

NETO, RENATO BRITO BASTOS**. Fundamentos da mecânica**: cinemática/leis de Newton. Fortaleza: Vestseller, 2010.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção PROFMAT)