

DOIS LADOS DE UMA MESMA VERTENTE ALGÉBRICA: RACIOCÍNIOS PROPORCIONAL E FUNCIONAL POR ESTUDANTES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Two sides of a same algerbrating strand: proportional and functional reasons by students of the initial years of fundamental education

Rozimeire Soares de Oliveira Porto¹
Sandra Maria Pinto Magina²
German Ignacio Ferrer Gomeró³

Resumo

Este artigo é um recorte de uma pesquisa que investigou as competências e os esquemas que os estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental apresentam em situações problemas da Álgebra elementar e ainda os níveis de raciocínio algébricos mobilizados em tais situações. Esta pesquisa teve por suporte uma metodologia descritiva com abordagem diagnóstica. A finalidade foi identificar e compreender a natureza das estratégias apresentadas nos teoremas-em-ação pelos estudantes em apenas uma das situações-problema. Teve por base as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a Base Nacional Comum Curricular, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e discussões de especialistas. Buscamos identificar esquemas que retratassem a ligação entre o raciocínio funcional e o raciocínio proporcional. Analisando quantitativamente e qualitativamente os extratos dos protocolos de respostas dos estudantes, identificamos que, mesmo sem instrução formal estes apresentam competências na perspectiva funcional quer seja por noção proporcional ou por notações pré algébricas.

Palavras-chave: Esquemas; teoremas-em-ação; Raciocínio funcional; Raciocínio proporcional

Abstrat

This article is a cut of a research that investigates the skills and the schemas that the students of the 3º and 5º years of Elementary School present in situations problems of Elementary Algebra and also the levels of algebraic reasoning mobilized in such situations. This research was supported by a descriptive methodology with a diagnostic approach. In this clipping, the purpose was to identify

¹ Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz- UESC/Bahia. Atualmente é professora da Universidade do Estado da Bahia- UNEB, no DCTH, *Campus XVII*, em Bom Jesus da Lapa, Bahia.

² Doutora em Mathematics Education pela University of London. Atualmente é professora da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC).

³ Doutor em Física pelo Centro de Pesquisas Físicas, Brasil. Atualmente é professor da da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC).

and understand the nature of the strategies presented in the theorems-in-action by students in only one of the problem situations investigated. This study was based on the guidelines of the National Curricular Parameters, the National Curricular Common Basis, the Vergnaud Conceptual Field Theory and discussions of experts. We sought to identify schemas that portrayed the link between functional reasoning and proportional reasoning. Analyzing quantitatively and qualitatively the extracts from the protocols of student responses, we identified that, even without formal instruction, these present competences in the functional perspective either by proportional notion or by pre-algebraic notations.

Keywords: Schemes; theorems-in-action; Functional reasoning; Proportional reasoning


INTRODUÇÃO

Este artigo analisa parte de uma pesquisa que investigou as competências, os esquemas e os níveis de raciocínio de estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental quando eles se deparem com situações-problema que envolvem conceitos da Álgebra elementar. Para efeito deste artigo procedemos com um recorte, cujo objetivo (específico) foi identificar e compreender a natureza das estratégias apresentadas nos esquemas de ação apresentados por estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental ao lidarem com uma única situação-problema entre as dez investigadas. Está em especial abordando a vertente algébrica da função numa estrutura do campo conceitual multiplicativo.


Para iniciar nossa discussão apresentamos a situação-problema Q1 (foco deste artigo) que foi objeto de investigação na pesquisa a que este recorte destina (ver figura 1.1).

Figura 1.1 Situação-problema (Q1) do instrumento diagnóstico

NA VENDA DE DONA ANA COM R\$2,00 SE COMPRA TRÊS BOMBONS VERMELHOS COMO MOSTRA A FIGURA ABAIXO:



DIOGO GASTOU R\$ 10,00 COMPRANDO ESSES BOMBONS VERMELHOS. QUANTOS BOMBONS ELE COMPROU?



FONTE: EXTRATO DE PROTOCOLO

Trata-se de uma situação-problema em que se estabelece uma relação quaternária⁴, de "muitos para muitos" (MAGINA, MERLINI e SANTANA, 2013). Nesta situação-problema a quantidade de bombons que se pode comprar com R\$ 10,00 está implícita, e o estudante não dispõe de valores discretos de real para a unidade (um bombom). Envolve conceitos básicos da classe operatória da aritmética, como operações de multiplicação e divisão, a noção de fração, de proporção, de razão e de uma função linear. Para resolvê-la o estudante se depara com a necessidade de encontrar um valor desconhecido (a quantidade de bombons) a partir de uma relação intrínseca estabelecida entre duas grandezas distintas: a quantidade de bombons e seu valor, em reais. Esta relação coloca em conflitos conhecimentos na escolha dos teoremas necessários à sua resolução, uma vez que este tipo de tarefa não é usual nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No caso, trata-se de uma situação-problema simples envolvendo multiplicação e divisão implicadas numa proporção direta entre duas variáveis ou numa relação funcional de 1º grau.

Algebricamente está situação-problema configura-se como um padrão algébrico do valor ausente (POST; BEHR E LESH,1995), em que o valor da taxa unitária não representa um valor natural (um bombom custa R\$0,6666...). Para os estudantes dos anos iniciais este valor (contínuo e periódico) pode representar uma dificuldade, uma vez que seu conhecimento numérico (oficial) situa-se no conjunto N^5 como um subconjunto do conjunto Q^6 .

Uma especificidade desta situação-problema é a de pertencer à uma estrutura multiplicativa (VERGNAUD,1996) e, ocasionar especulações (suposições empíricas) no momento de sua resolução. Se está for parte do planejamento pedagógico de uma turma dos anos iniciais do Ensino Fundamental (3º ou 5º ano por exemplo), é preciso ficar atento para os questionamentos e limitações conceituais dos estudantes. Estes podem compreendê-la como uma situação aditiva e/ou multiplicativa e perguntar- "é para fazer uma conta 'de mais!'" "É de 'vezes' ou de 'dividir!'"

⁴ Relações que ligam quatro elementos entre si, e frequentemente exprimem a identidade de duas relações binárias (VERGNAUD, 2014).

⁵ Conjunto dos números naturais, $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. (DANTE, 2010)

⁶ Conjunto dos números racionais, que compreende, nesta etapa, os próprios números naturais, os números decimais exatos e os números em forma de fração. (DANTE, 2010)

Entretanto, se sua aplicação for com estudantes do 9º ano ou no Ensino Médio as perguntas podem apresentar um grau de sofisticação maior (presumível). Estes podem questionar, por exemplo: (d) "Professor (a), é uma proporção simples?" (e) "É uma situação de porcentagem?" (f) ou ainda, "é um problema de função?"

Estes supostos questionamentos tendem a demonstrar as concepções cognitivas e as aprendizagens que os estudantes exibem em relação aos conceitos envolvidos nesta situação-problema. A miúdo, conjecturamos também a possibilidade de identificar nestes questionamentos indícios entre as características aritméticas e algébricas envolvidas em tal situação. Estes indícios podem demonstrar uma continuidade entre os domínios da aritmética e da Álgebra ainda nos anos iniciais. Evidenciando a existência de uma relação intrínseca entre o raciocínio proporcional e o raciocínio funcional presentes em uma estrutura multiplicativa (SPINILLO, 1994).

Corroboramos com Lins e Gimenez (2001) quando estes ressaltam que as situações-problema de proporcionalidade utilizam a modelagem algébrica como um esquema instrumental. Ou seja, um método o que evidencia a sua natureza algébrica. A situação-problema (Q₁), apresentada na Figura 1.1, é um destes casos, pois apresenta uma dualidade conceitual, não comporta apenas um único conceito⁷. O que não limitaria sua resolução apenas nos domínios aritméticos elementares. Os conceitos envolvidos nesta situação estão relacionados ao Campo Conceitual das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 1996) e envolve mais de uma operação (multiplicação e/ou divisão) e mais de um conhecimento (aritmético e/ou algébrico). Temos que "uma situação por mais simples que seja, traz no seu bojo mais que um conceito" (MAGINA, SANTOS e MERLINI, 2014, p. 520). E que para interagir com estes conceitos ou com o campo conceitual a que pertencem, os estudantes necessitam de um conjunto de situações (tarefas) diversas e concatenadas.

Diante destes argumentos é oportuno investigar e refletir neste estudo sobre a natureza e as propriedades operatórias que compõe a situação-problema, Q₁, e buscar indícios que confirme sua relação com as estruturas da aritmética concomitantemente com as da Álgebra.

⁷ Objeto de conhecimento (SPINILLO, 1994)

No campo conceitual em que esta situação está posta, queremos chamar atenção para a relação entre as estruturas operatórias da multiplicação, da proporção e da função⁸, e formar uma tríade conceitual entre a *estrutura multiplicativa-proporção-função*. Não é necessário que se perceba as três em um único momento, mas que as identifique a miúdo como elementos desta situação-problema. A forma como percebemos esta tríade incide diretamente numa divisória que se encontra ligada aos conhecimentos dos sujeitos e suas concepções aritméticas e algébricas. Se por um lado, um matemático pode identificar toda esta tríade, o mesmo não vale para aqueles sujeitos cujo objeto de estudo não se restringe a área da Matemática.

Apresentaremos na primeira parte deste artigo, uma síntese de nosso referencial teórico, na sequência os pressupostos metodológico que ancoraram este estudo, as análises dos resultados gerados nos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes e por fim as conclusões finais acerca desta situação-problema (Q1).

O Raciocínio Proporcional e o Raciocínio Funcional.

Os raciocínios proporcional e funcional estão presentes em inúmeros contextos da vida diária, como por exemplo, numa transação comercial, num receita de bolo; em desenhos gráficos, entre outros. Se apresentam em contextos dentro ou fora da escola, sempre que objetivo for estabelecer uma relação entre a variabilidade de duas ou mais grandezas. A maioria das pessoas (escolarizadas ou não) se saem muito bem numa situação-problema que remete a uma proporção ou uma função. Evocam naturalmente suas propriedades para a resolução de uma determinada situação, seja de forma prática ou baseado em algum teorema matemático subjacente. .

Conceitualmente estes raciocínios se encontram interligados e apresentam uma relação com o campo conceitual das estruturas multiplicativa. Estas se encontram situadas nos domínios da teoria cognitivista de Vergnaud (1990) a “Teoria dos Campos Conceituais” uma vez que abrange:

O conjunto de situações cujo tratamento implica em uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que

⁸ Toda função é uma operação ou um operador (QUINE, 1987)

permite analisar estas situações: proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produção de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fracção, relação, número relacional, múltiplo e divisor, etc (VERGNAUD, 1996, p. 168).

Na conjuntura educacional brasileira estes conceitos mencionados por Vergnaud, são contemplados ao longo de toda Educação Básica. São incorporados a vários eixos temáticos nos currículos de Matemática, denominados “eixos estruturantes” (BRASIL,2010) cuja função reside na equidade conceitual de todos os estudantes do país.

Para efeito deste artigo nos concentraremos nos tópicos da proporção, da função e suas implicações para com a situação-problema elencada. A incorporação curricular (formal) da proporcionalidade e da função ocorre a partir do 7º ano e do 9º ano, respectivamente, do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, 2010). Seu ensino e aprendizagem costuma seguir uma metodologia baseada nos manuais didáticos.

Todavia, segundo estas mesmas diretrizes curriculares a noção de proporcionalidade aporta-se desde o 5º ano do Ensino Fundamental nos procedimentos dos cálculos operatórios da multiplicação (BRASIL, 1998; BNCC, 2017). Porém de uma forma intuitiva. Esta precisa ser incorporada de forma progressiva e dedutiva para que os estudantes se familiarizem com suas demandas conceituais. Num contexto em que a apropriação conceitual seja embasada em atividades que exploram a noções de grandezas, de medidas relativas ao espaço e também relativa às formas geométricas.

No que tange a BNCC (2017) a noção de proporcionalidade deve ser estudada a partir do 5º ano do Ensino Fundamental, numa proposta metodológica de resolução de situações-problemas que envolve uma proporcionalidade direta (simples) entre duas grandezas. E ainda, privilegiar situações-problema que abordem uma partição de um todo em duas partes proporcionais.

No que tange ao PCN de Matemática (1998), a noção de proporcionalidade deve ser abordada formalmente a partir dos 3º e 4º ciclo do Ensino Fundamental (a partir do 6º ano) e ser interligada aos conceitos de: escala, razão, taxas percentuais, propriedades proporcionais e pôr fim da regra de três (BRASIL,2010). Estas em concomitância com bloco dos conjuntos numéricos e suas operações.

Por outro lado, temos que a noção de função formal (noção algébrica), é incorporada ao currículo de Matemática apenas a partir do 9º ano do Ensino Fundamental

como regulamenta os PCN (1998) e a BNCC (2017). Segundo estes documentos, sua abordagem centra-se na concepção da Álgebra como estudo de relações⁹, explorando a ideia de variável. Tendo seu ensino e aprendizagem mediado pela identificação e utilização dos registros de representação algébrica e gráfica¹⁰. Sugere ainda, que sejam disponibilizados aos estudantes oportunidades para manipulação e exploração situações aritmética/algébrica, em que a aplicação e a resolução de problemas de caráter funcional abarquem diversos contextos científicos. Normalmente inicia-se pela função de 1º grau e na sequência para a função de 2º grau.

Todavia, não somos favoráveis a esta organização linear e hierarquizada propostas nas diretrizes curriculares (mencionadas) para o estudo da proporção e da função. Ao nosso ver, esta disposição não privilegia as situações que os estudantes se encontram imersos, ao apresentar os conceitos em intervalos estanques (ano escolar). Seja dentro ou fora do contexto escolar, esta prática não valoriza “o fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real” (BRASIL, 1997, p.38) e também do raciocínio funcional. Defendemos que nestes contextos os estudantes podem desenvolver de forma simultânea os pensamentos qualitativos e quantitativos, enquanto interagem com estes acontecimentos. Visto que, eles precisam identificar os atributos destes fenômenos e qual o significado destes no seu contexto, e ainda que produza um conjunto de conhecimentos necessários à conversão de um registro de representação numérico para um registro de representação algébrica (DUVAL, 2003). Tudo isso aliado a uma imbricação entre os raciocínios proporcional e o funcional.

O que se percebe é que, muitas vezes negligenciamos o tipo de entendimento necessário ao desenvolvimento o conceito de proporção e não observamos a importância que este apresenta para os domínios da álgebra. Para Silvestre e Ponte (2006) este tipo de raciocinar se situa como um dos alicerces da Álgebra. Uma vez, que este permite a exploração e o desenvolvimento de estratégias de cálculo baseado em um esquema de estruturas multiplicativas, comparação entre grandezas proporcionais e deduções quantitativas. Temos em Post; Behr e Lesh (1995, p.90) que o raciocínio proporcional:

⁹ Usiskin (1995)

¹⁰ Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003)

Envolve um senso de covariação, comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações. [...] tem aspectos tanto matemáticos como psicológico. Matematicamente, toda relação proporcional pode ser representada pela função $y = mx$, o tipo mais fundamental de equação linear.

Expandindo as discussões destes pesquisadores, encontramos nas ideias de Carraher e Schliemann (2014) que uma relação proporcional além ser representada por uma função pode ser considerada também uma operação aritmética. O que reforça a relação de continuidade entre os domínios da aritmética e da álgebra. Posto isso, podemos dizer que o Campo Conceitual no qual a proporção se situa é o mesmo Campo Conceitual da função (VERGNAUD, 1996), e o que as distingue é a relação de equivalência entre as razões envolvidas. Se estas forem de uma mesma grandeza teremos um raciocínio proporcional (POST, BEHR e LESH, 1995) e se forem grandezas distintas um raciocínio funcional.

Existem situações-problemas que podem despertar o desenvolvimento dos raciocínios proporcional e funcional nos anos iniciais de maneira interligada e complementar. E não como simples estruturas operatórias para a resolução de um exercício ou uma situação-problema contextualizada. Entretanto, mesmo sobre a visão que os conceitos de proporção e função se complementam, o seu ensino é ofertado de forma isolada e apenas a partir dos anos finais do Ensino Fundamental.

Esta forma tardia e compartimentada de apresentar estes conceitos tende a desperdiçar oportunidades importantes nos anos iniciais que podem comprometer, ou atrasar sua aprendizagem nos anos finais. Uma vez que despreza a existência de uma correlação entre os conhecimentos espontâneos¹¹ e os conhecimentos relacionais a qual os estudantes já se encontram inseridos. Por isso, conjecturamos que a transição entre estes pode ser efetuada de forma conjunta, uma vez que “a noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem usar regra de três)” (BNCC, 2017, p.226).

Defendemos que essa configuração (implícita) pode atuar de forma positiva proporcionando a familiarização precoce dos conceitos envolvidos. E que no momento oportuno ao se deparar com situações-problema que apresente em seu contexto as

¹¹ Vygotsky (1991)

relações funcionais formais, os estudantes as reconheçam como parte seu repertório operacional. Estas experiências possibilitarão o desenvolvimento e apropriação das ideias algébricas, visto que “as situações proporcionais fornecem uma porta ideal para o campo da representação algébrica, uma vez que seus antecedentes aritméticos são justificáveis através de abordagem do senso comum” (POST, BEHR e LESH,1995, p.102). Posto isso, almejamos que a observância e a prática da continuidade conceitual (filiação) entre a proporção e a função se constituirá num importante apoio epistemológico e cognitivo para a álgebra dos anos finais. E que, a antecipação deste contribuirá para a ampliação do conceito de variáveis: como uma incógnita, uma variável dependente e das várias funções reais que fazem parte do currículo de Matemática para a Educação Básica.

Aspectos Metodológicos

Nossa proposta metodológica centrou-se no tipo de pesquisa descritiva com uma abordagem diagnóstica. Visto que neste tipo de pesquisa o autor coleta os dados sem neles interferir, ou interferir o mínimo possível, enquanto descreve com detalhes uma situação, interpretando e classificando os diversos tipos de estratégias observadas (Ver em BOGDAN; BIKLEN, 1994; RUDIO, 2001; GIL 2002, FIORENTINI; LORENZATO, 2012)

Este estudo obteve um **parecer favorável do comitê de ética (nº1.853.509) no CEP/UESC em 12/12/2107**. A nossa pretensão foi identificar e classificar os esquemas¹² utilizados pelos estudantes, sua forma de raciocinar e de resolver a situação-problema (Q1). E ainda, identificar vestígios do raciocínio proporcional e/ou do raciocínio funcional, que evidencie o caráter aritmético e/ou algébrico presente no repertório dos estudantes, sujeitos da pesquisa.

Os sujeitos da investigados foram estudantes de uma escola pública de porte médio, que oferece ensino regular em três turnos (matutino, vespertino e noturno),

¹² Magina (sala de aula) explica que do ponto de vista Piagetiano podemos entender o termo “esquema” como uma estrutura ou uma organização das ações que se transfere ou generaliza no momento da repetição dessa ação em circunstâncias semelhantes ou análogas. Nas palavras de Magina “um esquema significa a formação de um conceito, numa forma ainda limitada porque esse conceito teria apenas um significado”.

situada em uma cidade do sudoeste do Estado da Bahia. Dentre os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, escolhemos aplicar o instrumento diagnóstico nos estudantes do 3º e do 5º anos do turno matutino, sendo 80 do 5º ano e 68 do 3º ano. Totalizando 148 estudantes investigados para compor a amostra pesquisada.

Nesta investigação utilizamos um instrumento diagnóstico (teste) com “a finalidade de obter dados que permitam medir o rendimento, a competência, a capacidade ou a conduta dos indivíduos” (MARCONI e LAKATOS, 2013, p.113). Este teste foi composto por dez situações-problema, perfazendo um total de 14 itens, envolvendo vertentes algébricas relacionadas à: sequência, equação ou função. As situações-problema apresentavam representações icônicas ou numéricas, e com nível de dificuldade (resolução) simples ou sofisticada. Todavia este recorte refere-se a apenas uma destas situações-problema.

Este teste, foi aplicado por uma das pesquisadoras, acompanhada pela professora regente, em todas as turmas num mesmo dia, porém em horários diferentes (combinado previamente com coordenação e com cada professor, cujos estudantes participaram da pesquisa). Sua aplicação, foi coletiva, com as resoluções individuais e teve duração aproximadamente de uma hora (60 minutos) por turma. Vale ressaltar que os alunos não souberam antecipadamente a data da realização do teste nem do conteúdo abordado. Cada uma das situações-problema foi lida em voz alta para que todos os estudantes da turma tomassem conhecimento simultaneamente. Nesse momento os estudantes podiam dirimir quaisquer dúvidas em relação ao entendimento semântico do texto. Porém nenhuma interpretação Matemática era feita, seja pela professora da turma, seja pela pesquisadora. Qualquer pergunta do estudante nessa direção encontrava respostas do tipo “não sei, o que você acha?”

Durante a classificação a priori do instrumento investigativo todas as situações-problema foram categorizadas de acordo com a vertente algébrica investigada. No que concerne a situação-problema Q1, está apresentou segundo as variáveis¹³ de estudo, um habitat nos domínios da vertente da função, com uma representação icônica e de nível de resolução simples. Sendo definida algebricamente por $f(x) = \frac{3}{2}x$, cujo valor de x representa o domínio de $f(x)$ e a quantidade de pacotes de R\$2,00; $f(x)$ o contradomínio

¹³ Variáveis da pesquisa: objeto matemático, representação gráfica e nível de resolução.

a quantidade de bombons que se pode comprar. Temos no domínio desta função um múltiplo (positivo) de dois e no contradomínio um número múltiplo (positivo) de três.

A posteriori analisamos todos os protocolos de respostas na busca por esquemas que retratasse ou direcionasse uma forma proporcional ou funcional de raciocinar dos estudantes. Entre aqueles que apresentavam esquemas (passíveis de análise) encontramos vários tipos de raciocínio: nas estruturas operatórias da adição, da multiplicação, da relação proporcional e da relação funcional. Como nosso objetivo centrava-se nos raciocínios proporcional e funcional fizemos uma triagem nos protocolos e os agrupamos segundo suas características operatórias eleitas. A partir deste crivo identificamos quatro tipos de categorias em relação à proporção e à função, duas de cada uma, segundo o teorema-em-ação verificado nos esquemas e sua apresentação algébrica (quadro 3.1).

Quadro 3. 1. Categorias de Análise

Raciocínio	Categoria	Teorema-em-ação
FUNÇÃO	C_I	2 → 3 10 → x
	C_{III}	x → 10 3 → 2
PROPORÇÃO	C_{II}	2 → 10 3 → x
	C_{IV}	10 → 2 x → 3

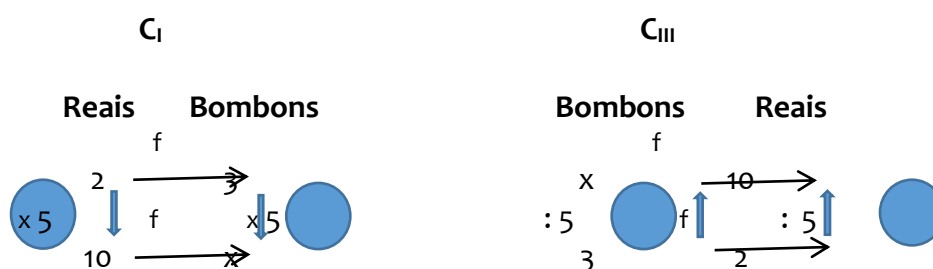
Fonte: os autores.

Para classificar as categorias de análise utilizamos os critérios que em uma relação quaternária, esta relação se estabelecer entre pares de razões de grandezas iguais, teremos uma proporção (POST; BEHR; LESH,1995). No caso da situação-problema investigada quando se estabelece uma equivalência/comparação entre a razão da unidade

monetária de R\$2,00 para R\$10,00 e a razão entre três bombons e x bombons estamos instituindo uma proporção simples.

Entretanto se estabelecermos uma relação entre grandezas distintas teremos uma função. Isto equivale dizer que ao relacionarmos R\$2,00 a quantidade de três bombons, e entre R\$10,00 e o valor (desconhecido) x de bombons evocaremos uma noção de funcional.

Nas categorias de análise elencadas, temos uma de perspectiva horizontal que aborda a noção de uma função linear e outra numa estrutura escalar, assim identificadas:



Na busca pela função f , tem-se o operador que permite passar de R\$10,00 para a quantidade de bombons é o mesmo que faz passar de R\$2,00 para a quantidade de bombons. A busca por este operador tende a ser facilitada pela descoberta da relação que converte R\$10,00 em cinco pacotes de R\$2,00, ou seja, estabelece-se uma relação escalar.

Temos que ao estabelecer a relação entre a quantidade de pacotes de R\$2,00 que temos em R\$10,00 e a quantidade de bombons teremos para cada uma das relações uma razão de mesma grandeza. Algebricamente podemos representar esta relação como equivalência entre $\frac{2}{10} = \frac{3}{x}$, e configura-la como um raciocínio proporcional. No que concerne à relação funcional, é possível pensar que se com R\$2,00 compro três bombons, então com R\$10,00 compro x bombons. Algebricamente podemos dizer que $\frac{3}{2} = \frac{x}{10}$.

A partir da categorização dos esquemas encontrados (todos) nos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes fizemos uma análise levando em consideração o desempenho dos estudantes e os esquemas apresentados nos teoremas-em-ação. Estes

dois instrumentos permearam todo o processo analítico que apresentaremos na seção seguinte.

Análise dos resultados

O resultado dos dados gerados/observados (protocolos de respostas) na situação-problema, Q1, foram analisados em dois pontos de vista, o quantitativo e o qualitativo. Na análise quantitativa o foco foi o desempenho dos estudantes e estes foram submetidos a testes estatísticos a fim de conferir o grau de confiabilidade dos resultados encontrados. Enquanto que na análise qualitativa buscamos identificar nos esquemas as estratégias, os teoremas-em-ação utilizadas pelos estudantes ao resolverem as situações-problema propostas no instrumento investigativo. O objetivo foi identificar os esquemas de ação registrados, para a partir disto, inferir os níveis de raciocínio desses estudantes no processo de resolução (ou na tentativa) da situação-problema.

No que tange ao desempenho dos dois grupos na situação-problema em questão, observamos que enquanto o percentual de acerto dos estudantes do 3º ano foi 32,29% para os estudantes do 5º ano esse percentual subiu para 48,75%. Todavia, segundo o teste qui-quadrado (χ^2) esta diferença percentual (16,46%) entre os acertos não apresenta significância estatística (p-valor igual a 0,99). Estes dados foram analisados empregando o pacote estatístico SPSS usando o nível de significância de 5% (padrão).

Podemos observar ainda que a taxa de acerto foi de 32,29% para os estudantes do 3º ano e 48,75% para os do 5º ano, abrigando uma diferença de 13,46%. Mais uma vez, esta diferença percentual entre os acertos não apresentam relevância estatística (χ^2 , p-valor igual a 0,99). Isto significa que não é confiável estatisticamente, podendo ser ao acaso esta diferença, índice percentual.

Tal resultado nos causou surpresa porque enquanto os estudantes do 3º ano estavam apenas começando a serem introduzidos na operação de multiplicação, enquanto que os do 5º ano já vinham interagindo formalmente com tal conceito há, pelo menos, dois anos escolares consecutivos. Ou seja, os estudantes do 5º ano já tiveram contato com a

tabuada até 9, já aprenderam o processo formal da multiplicação e também da divisão. Portanto teriam, a princípio, todas as ferramentas necessárias para resolver a situação a contento.

A situação-problema, aliás, era bastante simples, estava apoiada em circunstância facilmente relacionada à realidade (situação de compra, envolvendo as noções quantitativas e monetárias) e com uma representação icônica. Então o que faltou, por que menos da metade deles conseguiram obter sucesso na questão?

A literatura tem mostrado (MAGINA, SANTOS, MERLINI, 2014) que problemas de proporção simples que envolvem uma relação de muitas quantidades para muitas quantidades (exemplo 1: A promoção no supermercado era: 2 mamões a 4 reais. Quanto pagarei se eu comprar 6 mamões?) são cognitivamente muito mais difíceis que os problemas cujas as quantidades partem da relação entre uma quantidade para muitas quantidades (exemplo 2: sabendo que um carro tem 4 rodas, quantas rodas têm 5 carros?) Isto pode ser explicado porque enquanto na situação do exemplo 2 o estudante pode facilmente utilizar a estratégia da adição repetida, o mesmo não acontece com o exemplo 1.

Quanto à dificuldade que os estudantes de nosso estudo tiveram para resolver o problema pode-se pautar na hipótese em que a dificuldade advém do ponto de vista cognitivo. De fato, há duas maneiras de se pensar a resolução do problemas:

A primeira é estabelecer a relação fixa entre as duas quantidades de mesma natureza mas ela está implícita; o que significa que, para obter o resultado, há necessidade de se coordenarem duas operações, a primeira de divisão para se encontrar a relação fixa (10 dividido por 2 reais), e a segunda de multiplicação (3 bombons multiplicados pela relação fixa encontrada, isto é, por 5).

A segunda é estabelecer a relação fixa (nesse caso funcional) entre as duas quantidades de natureza distintas (2 reais para 3 bombons). Nesse caso dividir-se-ia a quantidade de bombons pela quantidade de dinheiro. Nesse caso, mais um elemento dificultador aparecerá, qual seja, o resultado sai do conjunto dos números naturais para os racionais (1,5), conjunto esse pouco ou nada conhecido dos estudantes do 5º ano e,

principalmente do 3º ano. Após encontrar a relação funcional, caberá ao estudante multiplicar o segundo valor dado da grandeza valor (em real) pela relação encontrada (1,5).

Note que para se chegar a resposta do problema, tanto uma quanto outra estratégia não é simples, requerendo do estudante ações cognitivas sofisticadas, tal como calcular um valor de uma relação entre duas grandezas e seu resultado aplicar na outra grandeza. Isto significa ir muito além da memorização (com ou sem significado) da tabuada, exige muito mais do que lançar mão da estratégia adição repetida.

Após a análise baseada apenas nos desempenhos dos estudantes, partimos agora para proceder com a análise das estratégias utilizadas pelos estudantes de ambos os grupos na resolução do problema. Nela, nosso foco recaiu nos esquemas de ação registrados por eles em suas soluções, a partir dos quais pretendemos inferir seus níveis de raciocínio no que tange aos raciocínios funcional e proporcional.


De acordo com o quantitativo dos sujeitos pesquisados temos 148 respostas referente à esta situação-problema. Dentre estas, encontramos que duas respostas foram em branco, 82 apresentaram apenas a resposta, sem qualquer cálculo ou ação que nos permitissem identificar o esquema utilizado na resposta e uma resposta apenas repetiam um dos números contidos no enunciado. Isto significa que do total (148) temos estas 85 respostas que não são passíveis de análise. Logo, estas 85 foram excluídas de nossa análise, sobrando apenas 63 respostas com potencial de serem examinadas. A partir deste ponto os esquemas foram apreciados segundo às estratégias aditiva ou multiplicativa. Destas 63 respostas que apresentam um tipo de esquema, identificamos que 19 se encontram no campo das estruturas aditivas e 44 no campo das estruturas multiplicativas. No que tange a estrutura aditiva apresentamos um exemplo de protocolo de resposta cujo esquema retrata esta estrutura operatória.

Figura 4.1 Exemplo de resposta segundo uma estrutura aditiva

Resposta: 12 também

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

$$\begin{array}{r}
 + 2 \\
 10 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$



FONTE: RESPOSTA DO ESTUDANTE Nº16 DO 3º ANO – EXTRATO DE PROTOCOLO

Analisando os protocolos de respostas dos estudantes que apresentam uma estratégia do campo aditivo, identificamos que estas não contemplaram os tipos de raciocínios que almejamos discutir. Logo, excluindo as respostas do campo aditivo ficando com um total 44 de respostas (assertivas ou tentativas de acertos) passíveis de análise. Ou seja, estas respostas apresentaram algum tipo de esquema em conformidade com as categorias de análise estabelecidas a posteriori.

Para facilitar a compreensão desta análise expomos um quadro contendo o quantitativo das ocorrências para cada tipo de categoria e seu percentual referente ao tipo de teorema, categoria observada e ano escolar.

Quadro 4.1. Síntese das categorias, segundo a ocorrência dos esquemas

Esquema	3º ano	5º ano
Proporção	6	15
Função	10	13
Taxa de acertos	3/4	19/28

Fonte: dados da pesquisa

Analisando os esquemas apresentados nestes 44 protocolos de respostas apuramos uma média geral de 71,5% de acertos (75% para os estudantes do 3º ano e 68% para os do 5ºano). Isto nos permite verificar que a maioria dos estudantes apresentam algum tipo de raciocínio, quer seja funcional ou proporcional. Observa-se nos exemplos retirados dos extratos dos protocolos de respostas dos estudantes que estes embora sem

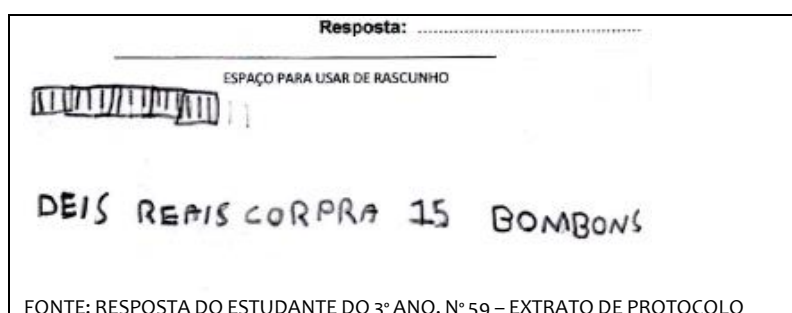
o devido conhecimento formal são capazes de desenvolver um raciocínio adequado às necessidades impostas pela situação-problema Q.1

Estes conhecimentos podem ter sido ativados durante a abordagem do campo multiplicativo no seu currículo regular de Matemática. Tornando-se parte de seu repertório psico cognitivo (VERGNAUD, 1996) e adaptado à situação-problema. Em situações, por exemplo, no contexto dos eixos temáticos dos números e suas operações, do espaço, das formas e medidas, visto que neste os elementos da estrutura multiplicativa (multiplicação e divisão) são incorporados aos conceitos em formação. Entretanto, a noção de proporção apenas é abordada a partir do 5ºano (PCN,1998) em situações-problema de caráter aritmético. Temos também que a BNCC(2017) sugere que as primeiras ideias de proporcionalidade sejam conectadas ao eixo dos números, porém inseridas a partir do 4ºano do Ensino Fundamental. Esta inserção precisa envolver diferentes significados para as operações de multiplicação e divisão.

Análise dos esquemas dos estudantes em separados

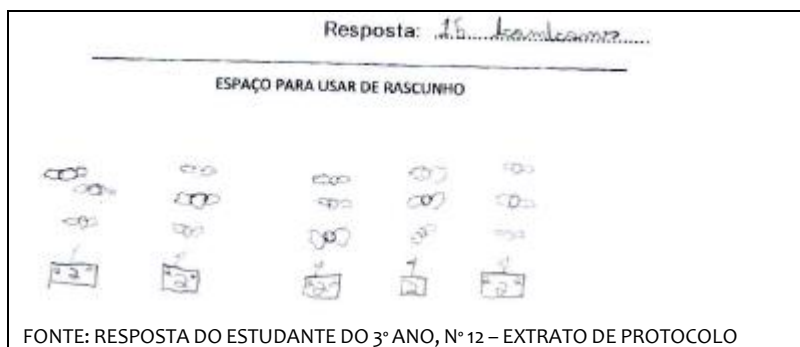
Seguindo esta análise apresentamos dois exemplos de respostas identificadas nos extratos dos protocolos dos estudantes em que o esquema de ação exibe os raciocínios proporcional e funcional. Faremos uma análise dos raciocínios funcional e proporcional dos estudantes em separados: primeiro do 3º ano; em segundo os do 5º ano. Na sequência faremos um estudo comparativo entre os tipos de raciocínios proporcional e funcional convergentes identificados em ambos os grupos de estudantes

Figura 4.2 Exemplo de raciocínio proporcional, segundo estudante do 3º ano



Analisando o esquema apresentado pelo estudante do 3º ano, nº59, observamos que este utiliza em seu esquema de ação apenas recursos icônicos. Desenha cinco retângulos unidos (formando um inteiro) e dentro de cada destes registra três pauzinhos, que representam o valor de R\$10,00 e a quantidade de bombons, respectivamente. Nesta configuração podemos identificar um teorema-em-ação contendo ideias subjacentes de uma proporção simples. Este teorema pode ser identificado matematicamente como uma relação de equivalência em que, $R(x) = x \cdot 2 = 10 \Leftrightarrow r(x) = x \cdot 3$, substituindo os valores numéricos na função, teremos que $R(5) = 5 \cdot 2 \Rightarrow r(5) = 5 \cdot 3 \Rightarrow r(5) = 15$

Figura 4.3 Exemplo de raciocínio funcional, segundo estudante do 3º ano



No que tange ao raciocínio funcional, o estudante do 3º ano demonstra ter uma noção subjacente deste tipo de relação apresentando um teorema-em-ação que o conduz a uma interpretação e resolução assertiva da situação-problema. Assim como no exemplo anterior identificamos um esquema composto por registros icônicos (bombons e nota de R\$2,00). Quando o estudante em seus desenhos relaciona (seta) as notas com os bombons este retrata uma relação funcional do tipo $f(x) = \frac{3}{2}x$. Esta função $f(x)$ representa o teorema-em-ação que está por trás de seus desenhos enquanto identifica que para esta relação faz-se necessário termos $x = 5$, que equivale a quantidade de notas de R\$2,00 suficientes para completar R\$10,00.

Agora apresentaremos os exemplos de respostas provenientes dos extratos dos protocolos dos estudantes do 5º ano. Assim como para com os estudantes do 3º ano, traremos na sequência primeiro o raciocínio proporcional e a seguir o funcional.

Figura 4.3. Exemplo de Raciocínio proporcional, segundo estudante do 5º ano

Resposta: Ele comprou 18 bombons
de 50ms

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

$\begin{array}{r} + \\ 20 \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} + \\ 20 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} + \\ 20 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} + \\ 20 \\ \hline 20 \end{array}$
$\begin{array}{r} + \\ 20 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} + \\ 20 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} + \\ 20 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} + \\ 20 \\ \hline 20 \end{array}$

FONTE: RESPOSTA DO ESTUDANTE Nº55 DO 5º ANO – EXTRATO DE PROTOCOLO

Observamos que o estudante do 5º ano de nº 55 apresenta um esquema da estrutura multiplicativa da situação-problema e sua relação proporcional. Consegue estabelecer a variação entre a quantidade de R\$2,00 existente em R\$10,00, utilizando uma estrutura do campo aditivo. Para Vergnaud (1996) está é uma *relação de comparação quantificada* (ter mais 3 bombons), um elemento constitutivo das estruturas aditivas, presente na estrutura da situação-problema uma vez que implica em quantos bombons a mais se deverá ter.

O fato do estudante utilizar uma adição de parcelas reiteradas para encontrar o resultado de uma multiplicação, pode demonstrar dificuldades durante a transição entre estas duas operações (adição e multiplicação). Este pode ser reflexo de metodologias utilizadas na formação do conceito de multiplicação baseado em apenas um tipo de situação. Todavia no processo de adição dos números de bombons este comete um erro na contagem das parcelas. Ele acerta na escrita (cinco de três) mas erra na soma (18 no lugar (de 15). Entretanto, no que concerne ao raciocínio proporcional este é apresentado no teorema identificado ou nas relações estabelecidas.

Figura 4.3. Exemplo de Raciocínio funcional, segundo estudante do 5º ano

Resposta: 15. com. 1000..

ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO

$11 = 11 \times 1$
 $11 = 11 \times 1$
 $11 = 11 \times 1$
 $11 = 11 \times 1$
 $11 = 11 \times 1$

15

FONTE: RESPOSTA DO ESTUDANTE Nº 03 DO 5º ANO – EXTRATO DE PROTOCOLO

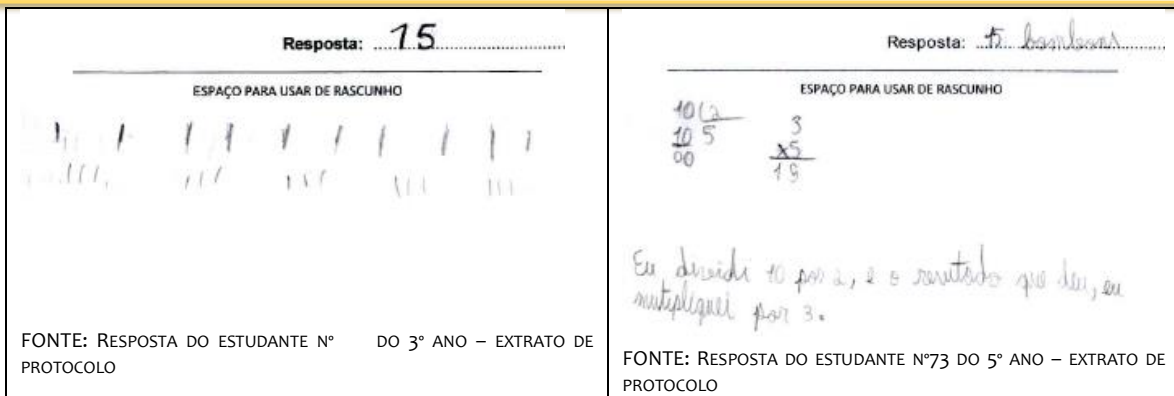
Identificamos que o estudante apresenta um raciocínio funcional similar ao formal, compreende a relação funcional por trás da situação-problema. Nunca é demais ressaltar que o estudo deste tipo de relação não faz parte do currículo de Matemática dos anos iniciais, o que reforça nosso argumento de raciocínio adaptativo. Uma vez que o estudante a manifesta é porque está se encontra latente em seu repertório pronta ou em fase de formação aguardando situações que a desperte. Neste sentido, temos que as noções algébricas básicas residem quietamente nos currículos (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2005), encontram-se adormecidas e, as situações-problemas de natureza aritmética um ambiente propício para sua manifestação.

Estudo comparativo dos esquemas

Ao compararmos os esquemas adotados pelos estudantes (figura 4.4) quanto ao raciocínio proporcional notamos uma analogia em seus teorema-em-ação. Enquanto o estudante do 3º ano o faz na forma icônica, o estudante do 5º ano numa forma algorítmica organizada. Esta diferença pode estar relacionada à distribuição curricular¹⁴ do conceito de proporção nos anos iniciais e os conhecimentos esperados.

Figura 4.4. Exemplos de raciocínio proporcional

¹⁴ A introdução da noção de proporcionalidade como conceito acontece a partir do 2º ciclo de aprendizagem, no 5º ano do Ensino Fundamental (PCN,1997)



Notamos que estudante do 3º ano apresenta um esquema construído a partir de sua capacidade criativa (idiossincrática). O que é previsível, uma vez que não dispõem de conhecimentos aritméticos adequados à situação-problema. Ele constrói suas hipóteses e transforma os ícones (tracinhos) em um aparato matemático eficaz na interpretação das invariantes operatórias contidas da situação-problema.

Entretanto, para o estudante do 5º ano estas invariantes operatórias já foram integradas ao seu repertório aritmético e o conceito de proporção já se encontrado assimilado e acomodados. Este conceito foram automatizados e apreendidos dentro do seu contexto e reproduzidas no momento oportuno. Está “automatização é evidentemente uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da acção” (VERGNAUD, 1996, p.158), mas isto não impede que o estudante mantenha sua singularidade.

Quer seja por procedimentos automatizados ou espontâneos identificamos nos teoremas-em-ação dos estudantes formas de raciocinar que propiciaram a compreensão e a resolução da situação-problema que na pesquisa foi classificada como situação de estrutura multiplicativa, funcional de muitos para muitos.

Figura 4.5. Exemplos de raciocínio funcional

<p>Resposta: <u>15</u>.....</p> <hr/> <p>ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO</p> <p>$000 + 000 + 000 + 000 + 000$</p>	<p>Resposta: <u>15</u>.....</p> <hr/> <p>ESPAÇO PARA USAR DE RASCUNHO</p> <p>$2111 \cdot 5$ 2111 2111 $+ 2111$ 2111 <hr/> 10</p> <p>Ele comprou 15 Balaes Eu patee 2 sinca rezas 3 depois patee cada 2 3 palanhas</p>
<p>FONTE: RESPOSTA DO ESTUDANTE Nº 66 DO 3º ANO – EXTRATO DE PROTOCOLO</p>	<p>FONTE: RESPOSTA DO ESTUDANTE Nº 69 DO 5º ANO – EXTRATO DE PROTOCOLO</p>

Embora, estes estudantes ainda não tenham tido nenhum tipo de instrução sobre a noção de uma função linear apresentam em seus esquemas uma covariação de grandezas específica de uma função linear, $f(x) = ax$. Novamente encontramos uma similaridade quanto aos teoremas-em-ação apresentados pelos estudantes. Eles nos parece ser uma relação do tipo funcional, $f(10) = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 10$.

Os tipos de esquemas apresentados pelos dois estudantes apresentam características particulares, ambos são icônicos. O esquema de ação do estudante do 3º ano se baseia mais nos icônico enquanto que o do 5º ano é icônico também, porém, com um teor um pouco maior de abstração. Suas formas de raciocínios funcional se equivalem e nos parece produtos de uma relação intuição e dedutiva. Ambos estudantes demonstram ter condições básicas para desenvolver um raciocínio funcional, mas este tipo de raciocinar não é aproveitado nem nas práticas docentes e muito menos nos manuais didáticos.

Considerações Finais

Após analisarmos os extratos dos protocolos de respostas referente à situação-problema (Q1) do instrumento investigativo a que este recorte se dedica, podemos dizer

os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, mesmo sem instrução formal apresentam competências para os raciocínios proporcional e funcional.

Isto porque identificamos em seus teoremas-em-ação evidências de uma forma peculiar de raciocinar, que se ajustada a um processo dinâmico e sistemático poderá evoluir para o raciocínio proporcional e conseqüentemente para o funcional. No que concerne ao raciocínio proporcional tanto os estudantes do 3º ano quanto os do 5º ano apresentam estratégias de resolução próximas àquelas esperadas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. O que as difere são os esquemas de organização e elementos utilizados. Enquanto que ações dos estudantes do 3º ano é mais visual, icônicas, as do 5º ano são mais organizadas algorítmicamente e abstrata. Muitos podem dizer que os estudantes do 5º ano são mais competente, devido a um nível mais elevado de organização. Esta hipótese nos parece equivocada uma vez que existe uma diferença em experiência escolar (três anos) e desenvolvimento psico cognitivo entre eles (idades).

No que tange ao raciocínio funcional, podemos dizer que os esquemas de ação se equivalem, apresentam uma base intuitiva e dedutiva. Presumimos que para organizar seus teoremas-em-ação os estudantes utilizaram conhecimentos advindos das estruturas multiplicativas (repertório cognitivo) e as adaptaram na pretensão de compreender, analisar e resolver uma situação-problema de caráter funcional.

Reportando ao objetivo inicial deste artigo¹⁵, podemos afirmar que estes estudantes apresentam condições favoráveis à instrução da vertente algébrica da função. Uma vez que, apresentaram em seus esquemas indícios da existência dos raciocínios proporcional e funcional, adequado e sofisticado, para os níveis de instrução a que estes estudantes foram expostos curricularmente.

Os teoremas-em-ação verificados neste estudo sugere que a antecipação destes conceitos para os anos iniciais do Ensino Fundamental é viável psicologicamente e didaticamente, uma vez que eles já existem nos repertórios cognitivos dos estudantes. E que persistir numa abordagem conceitual e metodológica baseados em ideias equivocadas

¹⁵ Identificar e compreender a natureza das estratégias apresentadas nos esquemas de ação apresentados por estudantes apresentados por estudantes dos 3º e 5º anos do Ensino Fundamental ao lidarem com uma situação-problema do campo conceitual multiplicativo. p.2.

e antiquadas¹⁶ representa um atraso no desenvolvimento das potencialidades algébricas já nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Não nos referimos à uma antecipação formal da proporção e das notações algébricas da função mas, um prelúdio das noções dos raciocínio proporcional e funcional baseados em situações de estruturas multiplicativas.

Posto isso, sugerimos uma prática metodológica ancorada nas ideias da early algebra¹⁷, que possibilite o desenvolvimento de competências estratégicas da proporcionalidade e do raciocínio funcional (adaptativo) desde que mediada por situações-problema. Argumentamos que esta postura poderá majorar a proficiência Matemática dos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental e adicionar ao seu repertório psico cognitivo, noções algébricas em que os domínios aritméticos podem ser limitados ou insuficientes.

Portanto, defendemos a ideia que se um estudante ao longo dos anos iniciais do Ensino Fundamental for exposto às situações que explorem os raciocínios proporcional e funcional desenvolverão (antecipadamente) condições favoráveis à aprendizagem, a compreensão e apropriação dos conceitos proporção e função. Esta precocidade terá reflexos quando estes conceitos forem formalizados nos anos finais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. Hygino H. Domingues, tradução. São Paulo: Atual, 1995.

¹⁶ Organização hierárquica, aritmética antes da álgebra.

¹⁷ Early algebra – como um programa de ensino que possibilita o desenvolvimento de competências e habilidades algébricas a partir de situações no contexto aritmético dos anos iniciais do Ensino Fundamental (PORTO, 2018)

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Elementos Conceituais e Metodológicos para os Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: MEC/SEF, 2017.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança: explorando notações**. Maria Adriana veríssimo Veronese, tradução. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early Algebra and mathematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, p. 3-22, 2008.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.; BRIZUELA, B. Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, Vol 7, 2006.

COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. (Org). **As ideias da Álgebra**. Hygino H. Domingues, tradução. São Paulo: Atual, 1995.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In MACHADO, S. A (Org.). **Aprendizagens em matemática: Registros de Representação Semiótica**. São Paulo: Papyrus, 2003.

GÓMEZ, B. O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios? In: VALE et. al. (Org.) **Números e Álgebra: na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: Gráfica Visão, 2006.

KATZ, Victor. J. **Álgebra: Gateway to a Technological Future**, Columbia: MAA Reports, 2007.

KIERAN, Carolyn et al. **Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching**. Hamburg: ICME, 2016.

LIMA, J. R. C.; BIANCHINI, B. L. A álgebra e o pensamento algébrico na proposta de Base Nacional Curricular Comum para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matemática**, São Paulo, v. 6, n.1, p. 197-208, 2017.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas: Papyrus, 2001.

MAGINA, S. A. **Teoria dos Campos Conceituais:** contribuições da Psicologia para a prática docente. São Paulo: PROEM, 2007.

MAGINA et. al. **Repensando adição, subtração:** contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

SANTANA, E. R.S. **A adição e subtração:** o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? Ilhéus: Editus, 2008

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. ed. rev. Maria Lúcia Faria Mouro, tradução. Curitiba: Ed da UFPR, 2014.

_____. A teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Maria José Figueiredo, tradução. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

Artigo recebido em: 05 de outubro de 2018

Aprovado em: 08 de março de 2019

SOBRE OS AUTORES

Rozimeire Soares de Oliveira Porto é uma pesquisadora e professora brasileira. Ela possui experiência matemática, com ênfase em Educação Matemática e Matemática Aplicada. Contato: rozi_porto3@hotmail.com

Sandra Maria Pinto Magina é uma pesquisadora e professora brasileira. Ela possui experiência em área de educação, com ênfase em formação de conceitos. sandramagina@gmail.com

German Ignacio Ferrer Gomero é um pesquisador e professor brasileiro. Ele possui experiência em matemática, com ênfase em física matemática, atuado principalmente nos seguintes temas: fundamentos da matemática e suas aplicações na teoria da computação e na modelagem matemática e difusão da pesquisa em Matemática entre jovens em idade escolar. Contato: gigferrer@uesc.br