MOVIMENTOS POTENCIALMENTE EXPANSIVOS COM ALUNOS-ISOMETRIAS-GEOGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE FIGURAS DO TANGRAM

POTENTIALLY EXPANSIVE MOVEMENTS WITH STUDENT-ISOMETRIES-GEOGEBRA IN THE CONSTRUCTION OF TANGRAM FIGURES

MOVIMIENTOS POTENCIALMENTE EXPANSIVOS CON ESTUDIANTE-ISOMETRÍAS-GEOGEBRA EN LA CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS TANGRAM

Robério Pereira Rocha [1]
Maria Deusa Ferreira Silva [2]

Manuscrito recebido em: 05 de outubro de 2022.
Aprovado em: 19 de julho de 2023.
Publicado em: 02 de agosto de 2023.

Resumo

Este estudo representa o terceiro artigo que compõe uma dissertação no formato multipaper de uma pesquisa de mestrado, cujo objetivo é analisar as estratégias utilizadas por alunos na superação de contradições internas, podendo indicar movimentos potencialmente expansivos na relação alunos-isometrias-GeoGebra ao construírem figuras do Tangram. O estudo foi pautado em uma abordagem qualitativa, configurando-se como uma pesquisa do tipo exploratória. Os dados da pesquisa foram produzidos, devido ao momento de pandemia, exclusivamente por meio de transcrições e *prints* de gravações realizadas nos ambientes *Google Meet* e *WhatsApp*. Fundamentamos o estudo por meio dos pressupostos teórico-metodológicos da teoria da atividade, utilizando como ferramenta analítica os miniciclos potencialmente expansivos provenientes dessa teoria. As nossas análises revelaram significativas superações de contradições internas, nas quais, acreditamos ter se manifestado indícios da ocorrência de aprendizagens potencialmente expansivas. A primeira dessas prováveis aprendizagens potencialmente expansivas surgiu pela divergência entre o que é estabelecido nas orientações do próprio GeoGebra e estratégias criadas pelos discentes após o manuseio do *software*, inovando o procedimento de translação por um vetor, tornando-o mais prático e preciso. Julgamos que a segunda aprendizagem potencialmente expansiva surgiu após a discordância gerada pelos discentes ao perceberem e justificarem a necessidade da utilização de apenas três das quatro isometrias do plano do GeoGebra sugeridas para a formação de figuras do Tangram, excluindo, sem prejuízo, uma das isometrias no plano. Os resultados encontrados nesse estudo mostrou-nos como a pesquisa em Educação Matemática pode contribuir com a expansão do conhecimento dos próprios pesquisadores.

[1] Mestre em Ensino pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Professor na Rede Estadual de Educação do Estado da Bahia e na Rede Municipal de Educação de Vitória da Conquista.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9729-1849 Contato: Robério.rocha2005@gmail.com

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte, com Pós-doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Professora no Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3462-3882 Contato: maria.deusa@uesb.edu.br

Palavras-chave: GeoGebra; Tangram; Isometrias no plano; Teoria da atividade; Aprendizagem potencialmente expansiva.

Abstract

This study represents the third article that composes a dissertation in the multipaper format of a master's research, whose objective is to analyze the strategies used by students in overcoming internal contradictions, which may indicate potentially expansive movements in the student-isometries-GeoGebra relationship when building Tangram figures. The study was guided by a qualitative approach, configuring itself as an exploratory type of research. The research data were produced, due to the pandemic moment, exclusively through transcriptions and prints of recordings made in the Google Meet and WhatsApp environments. We based the study on the theoretical-methodological assumptions of activity theory, using the potentially expansive mini-cycles from this theory as an analytical tool. Our revealed significant overcoming of internal contradictions, in which, we believe, evidence of the occurrence of potentially expansive learning. The first of these potentially expansive learnings emerged from the divergence between what is established in GeoGebra's own guidelines and strategies created by students after handling the software, innovating the translation procedure by a vector, making it more practical and accurate. We believe that the second potentially expansive learning process emerged after the generated by the students when they realized disagreement and justified the need to use only three of the four isometries of the GeoGebra plane suggested for the formation of Tangram figures, excluding, without prejudice, one prejudice of the isometries on the plane. The results found in this study showed us how research in Mathematics Education can contribute to the expansion of the researchers' own knowledge.

Keywords: GeoGebra; Tangram; In-plane isometries; Activity Theory; Potentially expansive learning.

Resumen

Este estudio representa el tercer artículo que compone una disertación en formato multi-paper de una investigación de maestría, cuyo objetivo es analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes en la superación de contradicciones internas, que pueden indicar movimientos potencialmente expansivos en la relación estudiantes-isometrías. -GeoGebra en la construcción de figuras Tangram. El estudio se basa en un enfoque cualitativo, configurándose como una investigación exploratoria. Los datos de la investigación se produjeron, debido al momento de la pandemia, exclusivamente a través de transcripciones e impresiones de grabaciones realizadas en el entorno de Google Meet y WhatsApp. Basamos nuestro estudio en los supuestos teórico-metodológicos de la teoría de la actividad, utilizando como herramienta de análisis los miniciclos potencialmente expansivos que se derivan de esta teoría. Como nuestro análisis reveló una significativa superación de contradicciones internas, en las que creemos que hay indicios de la ocurrencia de aprendizajes potencialmente expansivos. En primer lugar, surgieron experiencias de aprendizaje potencialmente expansivas de la divergencia entre lo establecido en los lineamientos propios de GeoGebra y las estrategias creadas por los estudiantes detrás del manual del software, innovando el procedimiento de traducción de vectores, haciéndolo más práctico y necesario. Creemos que el segundo proceso de aprendizaje potencialmente expansivo surgió de una discrepancia generada por los individuos discretos sobre los que advertimos y justifica la necesidad de utilizar solo tres de las cuatro isometrías. Los resultados encontrados en este estudio nos mostraron cómo la investigación en Educación Matemática puede contribuir a la ampliación del conocimiento de los investigadores.

Palabras clave: GeoGebra; Tangrama; Planos isométricos; Teoría de la actividad; Aprendizaje potencialmente expansivo.

Introdução

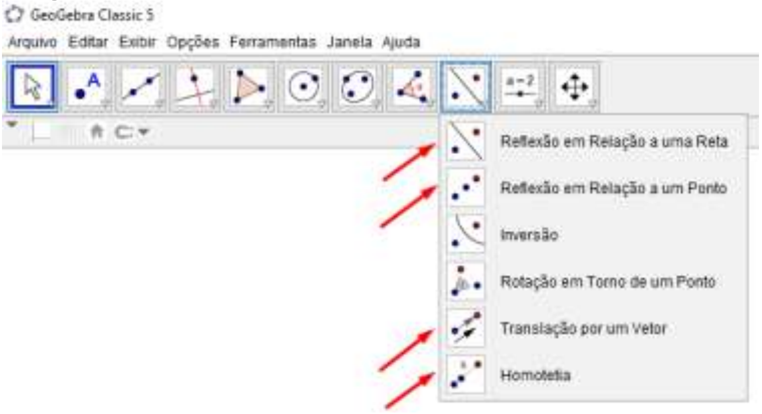
Observando o cotidiano das escolas de Ensino Básico onde atuamos, percebemos que, principalmente no contexto de pandemia, o planejamento e desenvolvimento de atividades envolvendo a utilização das Tecnologias Digitais (TD) em sala de aula têm sido uma prática pedagógica constante. Entretanto, geralmente, inexiste a reflexão sobre de que maneira essas atividades podem ser tratadas sob o olhar de teorias da aprendizagem compatíveis e, às vezes, experiências significativas nem sequer são socializadas. Acreditamos que muitas dessas experiências poderiam se constituir como elementos desencadeadores de processos cognitivos, fundamentados em teorias, trazendo novos elementos e fortalecendo teorias ainda em processo de construção.

Rocha e Silva (2021) falam da possibilidade de acentuar o grau de cognição em uma atividade que é normalmente trazida para a sala de aula: a formação de figuras a partir dos polígonos do Tangram[3]. Segundo eles, utilizando o Tangram de forma tradicional, o aspecto matemático limita-se a conceitos básicos como ponto, ponto médio, polígonos, proporcionalidade, frações, porcentagem, dentre outros. Nesse sentido, quando se trata da construção das figuras, o aspecto matemático é perdido focando essencialmente no aspecto lúdico, como se fosse um jogo de peças que formam as mais diversas figuras. Todavia, a nossa perspectiva é fazer a construção dessas figuras com o GeoGebra, usando as Isometrias no Plano do GeoGebra (IPG), que são: reflexão em relação a uma reta; reflexão em relação a um ponto; rotação em torno de um ponto; e translação por um vetor (vide figura 1). Nesse sentido, com base em Borba, Silva e Gadanidis (2014), estamos propondo um pensar matemático-com-a-tecnologia, no qual a construção das referidas figuras tomam uma nova dimensão.

[3] O Tangram, segundo Ribeiro et al. (2012), é um quebra-cabeça chinês composto por 7 figuras poligonais, de origem milenar, com o qual pode-se formar cerca de 1700 figuras.

e-ISSN: 2595-4881

Figura 1 - Menu das isometrias no plano do GeoGebra



Fonte: Figura elaborada pelos autores a partir do uso do GeoGebra, conforme Rocha (2021).

Segundo Nunes (2021), o vocábulo isometria tem origem etimológica grega, no qual, *iso* significa igual, e *metria* designa medida, resultando assim na ideia de medidas iguais. Ainda segundo o autor, isometria representa uma transformação geométrica que converte uma figura em outra geometricamente igual. Dessa forma, ela não altera a medida dos lados da figura nem a amplitude dos seus ângulos.

Diante dessa perspectiva, Silva e Rocha (2021), ainda, argumentam que a construção de figuras de Tangram (vide figura 2) com o uso das IPG (que serão realizadas pelos alunos da nossa pesquisa), requer que os envolvidos realizem estratégias lógico-matemáticas no sentido de reorganizarem o pensamento acerca do que já sabem, como por exemplo: mobilizar conhecimentos matemáticos relacionados a esses comandos; mobilizar esses conhecimentos por meio da mediação da tecnologia (GeoGebra); tomar decisões, seguindo uma sequência de procedimentos estabelecidos.

Figura 2 – Ilustração do Tangram.

Fonte: Elaborada pelos autores, conforme Rocha (2021)

Independentemente de qual seja a história sobre a criação do Tangram (são diversas lendas), este quebra cabeça tem sido cada vez mais utilizado como material didático nas aulas de Matemática, pois apresenta um forte apelo lúdico e proporciona aos alunos o desenvolvimento de habilidades de pensamento (SOUZA et al., 1997).

Neste estudo, nos fundamentamos na teoria da atividade (TA) para, com um olhar bastante atento, analisarmos as estratégias utilizadas por alunos na superação de contradições internas que podem indicar movimentos potencialmente expansivos na relação alunos-isometrias-GeoGebra ao construírem figuras do Tangram. Diante do exposto e das circunstâncias proporcionadas, julgamos ser possível responder à pergunta norteadora de nossa pesquisa: *Quais estratégias alunos do ensino médio realizam ao construir figuras de Tangram utilizando as opções de isometria no plano do GeoGebra, à luz da teoria da atividade*?

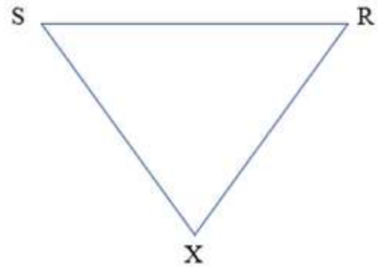
Para responder satisfatoriamente à questão supracitada, inicialmente apresentamos os conceitos dos elementos que estão envolvidos: GeoGebra, isometrias no plano e Tangram. A seguir, abordamos o nosso suporte teórico, a teoria da atividade, enfatizando as ideias de Engeström sobre aprendizagem potencialmente expansiva, afunilando a nossa proposta de análise para as ideias a respeito dos miniciclos potencialmente expansivos. Em seguida, abordamos os procedimentos e instrumentos para produção de dados e aspectos metodológicos. Na sequência, analisamos os dados produzidos e, finalmente, manifestamos as nossas considerações.

Teoria Histórico-Cultural da Atividade considerando as contribuições de Vygotsky, Leontiev e Engeström

Segundo Engeström (1999), a teoria histórico cultural da atividade, ou simplesmente, teoria da atividade, tem suas bases na filosofia alemã de Kant e Hegel, nas obras de Marx e Engels e na psicologia histórico-cultural soviética de Vygotsky, Leontiev e Luria, que vem sendo desenvolvida desde 1920, buscando compreender a formação humana na atividade social. Para Kuutti (1996), a TA se refere a um aporte filosófico e multidisciplinar com o intuito de estudar as diversas formas de práticas humanas como processos de desenvolvimento, com os aspectos social e individual ao mesmo tempo.

Vygotsky (1981) defende que, independentemente do tipo de resposta, o processo da relação $S \rightarrow R$ (estímulo → resposta), proposto pelo behaviorismo, é estático. A teoria vygotskyana de mediação cultural concebe que toda ação humana com o mundo não é direta, mas permeada por instrumentos e signos. Essa concepção foi representada por Vygotsky num modelo triangular, (figura 3), incluindo um terceiro elemento (X), intermediando os outros dois elementos ($S \rightarrow R$). Sendo assim, o indivíduo não poderia ser entendido separadamente dos meios culturais e sociais nos quais está imerso; a sociedade, analogamente, não poderia ser entendida sem os indivíduos que a compõem e os artefatos produzidos por ela.

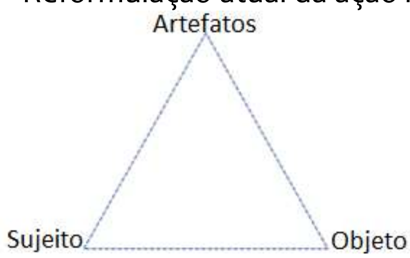
Figura 3 – Modelo inicial de ação mediada, Vygotsky.



Fonte: Elaborada pelos autores baseada em Vygotsky (1984).

De acordo com Vygotsky (1984), a criação e a utilização de signos auxiliares, elemento X na figura 3, para resolver um problema psicológico (relacionar, lembrar, escolher etc.) são relativamente análogas à criação e utilização de instrumentos de trabalho, sendo este último, responsável por mediar atividades de fluxo externo. Já na mediação dos signos, o indivíduo pode controlar de forma voluntária sua capacidade psicológica (atividade interna), ampliando sua capacidade de atenção, acúmulo de informações etc. Nesse sentido, conforme figura 4, que ficou conhecida em novas simbolizações da TA, os artefatos mediadores representam o elo entre sujeito e objeto.

Figura 4 – Reformulação atual da ação mediada.

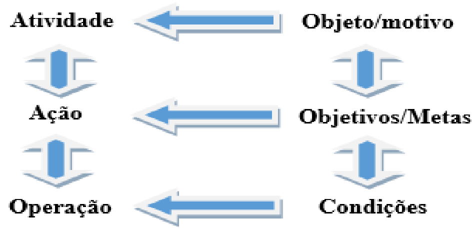


Fonte: Elaborada pelos autores baseada em Engeström (1991).

Leontiev (1978) esclarece que, na proposta behaviorista, é ignorado o processo em que são realizadas conexões reais do sujeito com o mundo dos objetos. Entretanto, essa lacuna é preenchida pela forma representada na figura 4, em que os artefatos mediadores são compostos pelos instrumentos e os signos. A partir do trabalho de Vygotsky, Leontiev formulou as suas próprias ideias e deu continuidade ao desenvolvimento da TA. Ele ampliou a noção de mediação, integrando as inter-relações do indivíduo com a sua comunidade. Além disso, o autor enfatizou as peculiaridades da organização social em uma atividade coletiva por meio do exemplo da caça coletiva do homem primitivo. Nesse contexto, é analisada as regras e divisão de trabalho dos indivíduos envolvidos na caça, cada um com sua necessidade particular, e sua organização no processo da caça, atribuindo um trabalho individual a cada um deles. Segundo o autor, a atividade é o centro nas investigações. Nesse sentido, Leontiev (1983) enfatiza o fato de a atividade ser orientada pelo objeto, o qual, tanto real quanto ideal, é o que responde à necessidade do sujeito da atividade. O motivo é o estímulo que conduz a atividade a determinado objeto.

Enquanto a atividade pode ser identificada pelo motivo, as ações o são pela sua meta, e as operações, pelas condições instrumentais para sua realização (vide figura 5). Essas últimas são resultados da mecanização de uma ação individual após reincidentes realizações.

Figura 5 – Esquema de estrutura de atividade.



Fonte: Elaborada pelos autores baseada em Leontiev (1978), conforme Rocha (2021).

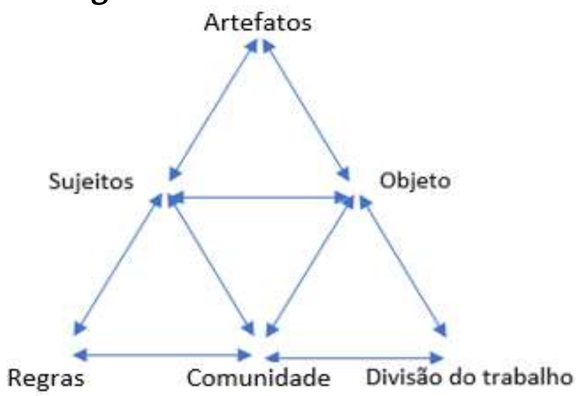
A diferenciação entre atividade, ação e operação é a base do modelo de Leontiev (1978). Para definir a atividade, é necessário explicar seu motivo, seu objeto. Após isso, podem-se estabelecer as ações e as operações que compõem a atividade. Cenci e Damiani (2018) dizem que esses três níveis – atividade, ação, operação – são intercambiantes, de acordo como se alteram os motivos e a tomada de consciência em relação a eles. Para as

e-ISSN: 2595-4881

autoras, por exemplo, quem está lendo este texto, poderá ter como atividade a leitura em si, porém poderá estar realizando a leitura por outro motivo, como referenciar o seu conteúdo em um trabalho que está escrevendo. Na primeira situação, a leitura é atividade, na segunda, é ação, compondo outra atividade, isto é, a realização de um trabalho. Na mesma situação, para realizar a leitura do texto, é necessário que se saiba decodificar a escrita, coisa que se faz de forma inconsciente. Essa situação é caracterizada como uma operação, pois esse processo de decodificação das letras já está automatizado.

Com base nas concepções de Vygotsky e de Leontiev e ideias originais, Engeström (1987), apresentou um diagrama para a representação de um sistema de atividade coletiva (figura 6). O diagrama tem como componentes o sujeito, objeto, artefatos, regras, comunidade e divisão do trabalho. Nesse modelo, o sujeito pode ser um indivíduo ou grupo de pessoas envolvidas em propósito, sendo o poder de ação do sujeito o foco da análise; objeto é a matéria-prima ou espaço problema na direção do qual a atividade se desenvolve; os artefatos mediadores representam tanto as ferramentas físicas, quanto as ferramentas psicológicas (signos); comunidade refere-se aos indivíduos que, mesmo não diretamente envolvidas nas ações dessa atividade, de alguma forma compartilham o mesmo objeto; divisão do trabalho diz respeito ao *status* e à divisão das tarefas entre os sujeitos da atividade, correspondendo às maneiras como são distribuídas e organizadas as ações e operações necessárias para a realização da atividade; e as regras se referem às normas e convenções explícitas e implícitas que conduzem as relações dentro do sistema de atividade.

Figura 6 – Sistema de atividade.



Fonte: Elaborada pelos autores baseada em Engeström (1987), conforme Rocha (2021).

Não se pode desconsiderar que um sistema de atividades está sempre conectado a outros sistemas por meio de algum de seus componentes e que se um componente do sistema muda, outras transformações devem se manifestar para ajustar o sistema de forma integral. Engeström (2001) sugere que as ações orientadas ao objeto são sempre, explícita ou implicitamente, caracterizadas por ambiguidade, interpretação, atribuição de sentido e potencial para transformação.

Engeström (2001) defende a existência de cinco princípios básicos que ajudam a sintetizar a TA. O primeiro princípio diz que um sistema de atividade, mediado por artefatos, orientado para um objeto e construído coletiva e continuamente, é visto como uma unidade básica de análise.

O segundo princípio refere-se à multivocalidade nos sistemas de atividades. Dentro do sistema, há múltiplas vozes, visto que diferentes indivíduos, possuindo história própria e que ocupam posições diversas na organização do trabalho, constroem o objeto e outros componentes da atividade de maneiras distintas, ou mesmo divergentes, em relação à perspectiva de demais membros de sua comunidade.

O terceiro princípio é o da historicidade. Sistemas da atividade assumem uma determinada forma e transformam-se por um longo período de tempo e seus problemas potenciais só podem ser compreendidos estudando-os em função da sua história. Esse estudo deve considerar o histórico da atividade em foco e de seus objetos, assim como o histórico das bases teóricas e das ferramentas que a influenciam.

O quarto princípio refere-se ao papel central das contradições como fontes de mudanças e desenvolvimento e não como problemas ou conflitos. Para Engeström (2001), as modificações na atividade ao longo do seu desenvolvimento são motivadas por contradições internas no sistema de atividade, que são manifestadas por tensões que se evidenciam através de situações-problema internas ao sistema de atividade. O desenvolvimento se manifesta por meio da superação dessas tensões.

Por fim, o quinto princípio refere-se à possibilidade de transformações expansivas da atividade. De acordo com Engestrom (2001, p.137), estas ocorrem “quando objeto e motivo de uma atividade são recontextualizados para envolver um horizonte radicalmente mais amplo de possibilidades do que em modos anteriores da atividade”.

e-ISSN: 2595-4881

Ao passo que as contradições de um sistema de atividade se aprofundam, reordenamentos, renegociações e uma dinâmica construção do sistema de atividade podem emergir. Diante desse contexto, as regras podem ser reinterpretadas, as tarefas redistribuídas e mesmo os objetos podem ser reconceitualizados, provocando mudanças no papel dos elementos que constituem a atividade. Dos cinco princípios listados, a atenção especial é dada, por Engeström, a este último. Esse princípio está diretamente vinculado à aprendizagem expansiva, sendo essa a nossa próxima abordagem.

Aprendizagem expansiva

Para Engeström e Sannino (2010), a concepção da aprendizagem expansiva é qualitativamente diferente das concepções de aprendizagem pautadas na aquisição com viés cognitivista. Nessa perspectiva, o discente, considerado como indivíduo e como comunidade, elabora um novo objeto para a sua atividade e o implementa na prática, simultaneamente à sua elaboração.

Segundo Engeström (2001), a teoria da aprendizagem expansiva (TAE) tem suas bases nos estudos de Gregory Bateson (1972), que classifica a aprendizagem em três níveis. O nível I representa a aquisição e reprodução de respostas consideradas corretas em um determinado contexto. O nível II representa a apropriação de regras e padrões de comportamento característico de determinado contexto. Eventualmente, surgem demandas contraditórias nesse último nível, criando dilemas que podem levar as pessoas ao nível III de aprendizagem, com essas passando a questionar radicalmente o sentido e significado do contexto, construindo um contexto alternativo mais amplo. Engeström (1987) usou como base para TAE, o nível III. Segundo o autor, quando uma pessoa ou grupo em uma atividade se depara com uma contradição, essa situação pode gerar questionamentos quanto ao significado daqueles padrões nos quais a atividade está inserida.

Os princípios do processo de análise utilizados durante a nossa pesquisa são baseados no Ciclo de Aprendizagem Expansiva (figura 7), o qual, segundo Engeström (1999), geralmente se inicia com a socialização e formação dos aprendizes que, dessa forma, tornam-se membros competentes para realização da atividade que segue o seu

e-ISSN: 2595-4881

curso de maneira rotineira. Inicialmente, predomina-se o processo de internalização que, para Engeström (1987), relaciona-se à reprodução de cultura e culmina com a externalização que está ligada à criação de novos artefatos ou novas estratégias que permitam uma solução para o problema em questão. Um ciclo de aprendizagem expansiva, conforme figura 7, é composto por sete etapas: (1) Questionamento, crítica ou rejeição de uma situação; (2) Análise da problemática da situação; (3) Elaboração de modelos que resolvam a dificuldade; (4) Escolha de um modelo; (5) Implementação do modelo; (6) Avaliação do modelo; (7) Consolidação da prática:

Figura 7 – Diagrama representativo de um ciclo de aprendizagem expansiva.

Fonte: Figura elaborada pelos autores baseada em Engeström (1999), conforme Rocha (2021).

A aprendizagem expansiva implica na construção coletiva de mudanças. Nessa concepção, Engeström (1987) refere-se a uma zona de desenvolvimento proximal coletiva que possibilita a aprendizagem expansiva a partir das ações coletivas, produzindo uma nova forma de realizar a referida atividade, ao invés de referir-se às possibilidades de desenvolvimento de um indivíduo por meio da mediação, como propõe Vygotsky (1984).

Essa perspectiva de aprendizagem lança um novo olhar sobre o conceito de internalização. Engeström (1987, 1999) conceitua a aprendizagem como ocorrendo em ciclos expansivos, envolvendo internalização e externalização.

> O ciclo de expansão de um sistema de atividade inicia-se priorizando a internalização, na socialização e no treinamento dos novatos para que se tornem membros competentes para a realização da atividade que, rotineiramente, segue o seu curso. A externalização criativa ocorre, primeiramente, como inovações individuais discretas. Com o aumento das rupturas e contradições da atividade, o processo de internalização rapidamente assume a forma de reflexão crítica por parte dos indivíduos – e a externalização, a busca por soluções, aumenta. A externalização atinge o seu máximo quando um novo modelo de atividade é construído e implementado. Com a estabilização do novo modelo, a internalização das suas formas e seus meios torna-se novamente o modo dominante de aprendizagem e desenvolvimento. (ENGESTRÖM, 1999, p. 33-34)

A internalização e a externalização são complementares no processo de aprendizagem e efetivação de mudanças. Dessa forma, os sistemas de atividade estão constantemente nesse movimento de internalização-externalização.

De acordo com Engeström e Sannino (2010), os ciclos de aprendizagem expansiva em larga escala são acompanhados de ciclos menores. Estes podem ser realizados em uma escala de tempo reduzida, podendo ter a sua conclusão em curtos intervalos de tempo. Os autores salientam que esses miniciclos, apesar de capazes de possibilitar ricas ações de aprendizagem, devem ser considerados como potencialmente expansivos, uma vez que as ocorrências destes miniciclos de aprendizagem não garantem que haja um ciclo expansivo de longa duração em andamento.

Para Souto e Borba (2013), os primeiros indícios de um miniciclo potencialmente expansivo podem ser identificados nos momentos em que surgem dúvidas, questionamentos, críticas que indiquem a gênese de contradições internas (ou tensões). Geralmente, a implementação de uma dada mídia, uma mudança de regras, uma nova forma de organização do trabalho, um dilema ou a interferência de fatores externos ao sistema podem provocar essas tensões.

Nesse sentido, identificamos a utilização de miniciclos potencialmente expansivos como ferramentas de análise em estudos, abordando situações de sala de aula (ENGESTRÖM, 2011; DAVID; TOMAZ, 2015). David e Tomaz (2015), por exemplo, constataram a ocorrência e desenvolvimento de quatro miniciclos potencialmente expansivos durante uma aula abordando o conteúdo regra de três. Nós, por meio dos pressupostos teóricos da TA, pretendemos atingir o objetivo desse nosso artigo que é: analisar as estratégias utilizadas por alunos na superação de contradições internas, podendo indicar movimentos potencialmente expansivos na relação alunos-isometrias-GeoGebra ao construírem figuras do Tangram.

Diante disso, consideraremos a orientação de Lima e Cunha (2018), quando sugerem que, para analisarmos um miniciclo potencialmente expansivo, é difícil constatarmos como ocorre a etapa de consolidação do novo modelo com a sua externalização social. Ainda segundo as autoras, a finalização desse miniciclo potencialmente expansivo vai ocorrer quando o professor, por meio da interação com o aluno, conseguir estabelecer parâmetros estáveis que irão, potencialmente, viabilizar o desenvolvimento da atividade pelo educando, modificando o objeto do sistema de atividade. As autoras concluem dizendo que esse processo permite que o professor, ao se envolver com uma situação imprevista, se envolva nesses miniciclos, mobilizando saberes e solucionando problemas, constituindo novos conhecimentos e uma nova prática.

Aspectos metodológicos

Dentre outros aspectos, Rocha (2021) esclarece que a atual pesquisa foi aplicada com alunos de uma escola pública da rede estadual, localizada em Vitória da Conquista, Bahia. Uma das principais razões da escolha dessa escola, como ambiente de pesquisa, é o fato de o professor pesquisador trabalhar na instituição, facilitando tanto a aplicação do projeto, quanto a liberação da escola por parte da direção. O público-alvo foi alunos do segundo ano do ensino médio e, por ser uma pesquisa do tipo qualitativa, optamos por envolver entre seis e dez estudantes. A escolha da série também não foi aleatória, já que, para obter a habilidade necessária em relação às IPG, é necessário, além de saber utilizar o software, possuir pré-requisitos necessários para compreender os conceitos de reflexão em relação a ponto e reta, rotação de ângulos e translação por vetores. Salientamos que, de acordo com o currículo do Ensino Básico brasileiro, as noções de vetores só são vistas por alunos do ensino médio. Nesse mesmo sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere a inserção de vetores no currículo de Matemática no ensino médio, objetivando compreender o conceito de vetor, tanto no seu aspecto geométrico, quanto do aspecto algébrico.

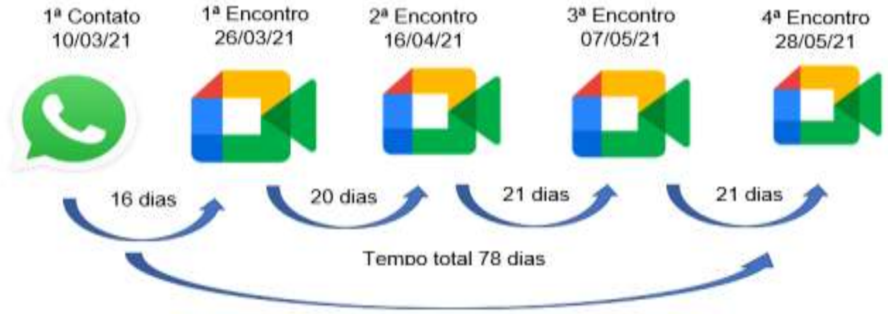
Inicialmente, tínhamos pensado em realizar a pesquisa de forma presencial. Porém, com o advento da pandemia de COVID-19, adaptamos toda a atividade para aplicação de forma online. Tivemos, então, diversas mudanças de estratégias, inclusive, a limitação das nossas possibilidades de definição dos alunos participantes. Fomos impulsionados a aceitar apenas alunos que possuíssem internet razoável em sua residência e que possuíssem computador, pois devido aos pequenos detalhes das movimentações a serem feitas, não é indicado que elas sejam realizadas por meio de um aparelho celular.

e-ISSN: 2595-4881

Fizemos o convite oral para quatro turmas de segundo ano da escola e após a exposição das condições mínimas necessárias para participação do projeto, seis estudantes manifestaram livremente o interesse em participar da pesquisa. Segundo Leontiev (1978) essa espontaneidade é uma das características essenciais para que uma atividade ocorra como tal.

Como já mencionado anteriormente, a nossa pesquisa foi realizada exclusivamente no ambiente *online* e os dados foram transcritos de gravações realizadas no *Google Meet* e *prints* de imagens desse mesmo ambiente, além de algumas manifestações em grupo de *WhatsApp* criado para essa finalidade. Por meio desse aplicativo, além de enviarmos um questionário para sondar os conhecimentos prévios e expectativas dos alunos diante do projeto, conforme figura 8, construímos um cronograma composto de quatro encontros virtuais extraclasse. Tais encontros sempre ocorreram com a participação do professor pesquisador, favorecendo a precisão, tanto na produção, quanto na análise dos dados. O contato por meio do *WhatsApp* e os quatro encontros realizados no ambiente do *Google Meet* foram distanciados sequencialmente por 16, 20, 21 e 21 dias, totalizando, assim, um período de 78 dias, compreendidos entre o primeiro e último contato com o professor pesquisador e os discentes envolvidos no processo.

Figura 8 – Cronograma dos contatos entre professor pesquisador e alunos.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Os encontros tiveram duração de aproximadamente duas horas cada um. No primeiro, apresentamos a eles o GeoGebra e, inclusive, passamos as orientações necessárias para a instalação do *software*. Instruímos, também, quanto aos conceitos e a utilização das isometrias no plano do GeoGebra, pois apesar de eles terem relatado o contato com o *software* no ano anterior, os comandos de isometria não foram abordados.

Já nos demais encontros, os alunos foram protagonistas ao formarem figuras por meio da movimentação de peças do Tangram utilizando as IPG. Nesse sentido, eles discutiram entre si sobre quais peças do Tangram deveriam movimentar e quais isometrias utilizar em cada situação. Interferíamos quando solicitados ou quando se fizesse necessário.

Durante os encontros, para os excertos (diálogos) representando intervenções dos sujeitos da atividade, foram atribuídos nomes fictícios aos alunos, as datas em que ocorreram e suas respectivas origens, ou seja, por meio de gravações do *Google Meet*, *chat* ou *WhatsApp*. Além da indicação de nomes fictícios (D. Oliver, Eneaga, Joana, Kleber, Luana e Samuel), os seis alunos sugeriram serem representados por meio de avatares. Aceitamos a sugestão, inclusive porque, segundo Leontiev (1978), para uma atividade ocorrer como tal, é essencial à espontaneidade e motivação dos sujeitos ao participarem das atividades propostas.

Em relação aos textos, de forma geral, foram transcritos tais como expressos pelos sujeitos da atividade. Entretanto, alguns deles apresentaram ajustes, não comprometendo a sua fidelidade, objetivando melhor compreensão por parte dos leitores. Lüdke e André (1986) reiteram esse ponto de vista, ao afirmarem que:

> As palavras, os gestos, os depoimentos, as observações feitas entre os sujeitos ou entre estes e o pesquisador devem ser registrados. Na medida do possível devem-se utilizar as suas próprias palavras. As citações são extremamente úteis para analisar, interpretar e apresentar os dados. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 30)

Feitas a produção, registro e organização dos dados em episódios nos quais julgamos haver a existência de indícios de aprendizagem potencialmente expansiva, tornou-se possível o processo de análise, seguindo os pressupostos de Triviños (1987), ao dizer que a análise dos dados representa sua organização, ajuste em unidades manipuláveis, síntese e identificação dos aspectos importantes que serão anunciados aos pesquisadores que se interessarem pelo tema. Particularmente, como veremos na próxima seção, o nosso processo de análise consistiu na identificação de tensões no sistema de atividade, culminando, às vezes, com a transformação do objeto do sistema e, caso essa transformação tenha se manifestado, julgamos ter ocorrido uma aprendizagem com potencialidade expansiva.

e-ISSN: 2595-4881

Nesse sentido, nas seções seguintes, identificamos e descrevemos dois miniciclos potencialmente expansivos e discorremos sobre as aprendizagens potencialmente expansivas proporcionadas por cada um deles. Sistematizamos essas análises de aprendizagens potencialmente expansivas em dois episódios, como veremos a partir da próxima seção. Além disso, destacamos um terceiro episódio não caracterizado com uma aprendizagem com potencial expansivo, mas sim, uma aprendizagem de nível II, conforme escala de Bateson.

Aprendizagens potencialmente expansivas

Episódio 1: Tensão originada pela divergência entre o que é estabelecido nas orientações do próprio GeoGebra sobre a translação por um vetor e as estratégias criadas pelos discentes após o manuseio desse *software*.

Como já dito, no primeiro contato com os discentes foi apresentado um questionário acerca de seus conhecimentos prévios sobre o Geogebra. Apesar de todos relatarem já ter tido contato com o software, nenhum dos discentes sabiam da existência das IPG, conforme mencionado abaixo.

> ***Kleber****: Eu já tinha ouvido falar de isometrias, mas não no GeoGebra. Quero conhecer.*
>
> ***D. Oliver****: Nunca tinha ouvido falar, mas estou curioso pra conhecer.*
>
> ***Joana****: Não conheço. Gostaria de conhecer.*
>
> ***Eneaga****: Me lembro um pouco de ouvir falar. Mas, no GeoGebra, não...*

Kleber e Eneaga revelaram praticamente a mesma situação: a de já ter ouvido falar das isometrias do plano, mas não vinculadas ao *software* GeoGebra. Já, D. Oliver e Joana, disseram que nunca tinham ouvido falar nas isometrias do plano. Entretanto, nas respostas é notável o interesse, a motivação, dos alunos em conhecerem as isometrias do plano no ambiente do GeoGebra.

Os comentários anteriores e os de Joana e D. Oliver apresentados a seguir no ambiente do *WhatsApp*, demonstram as motivações do grupo e, de certa forma, contribuem para uma convergência de ideias em relação ao objeto inicial do sistema de atividade.

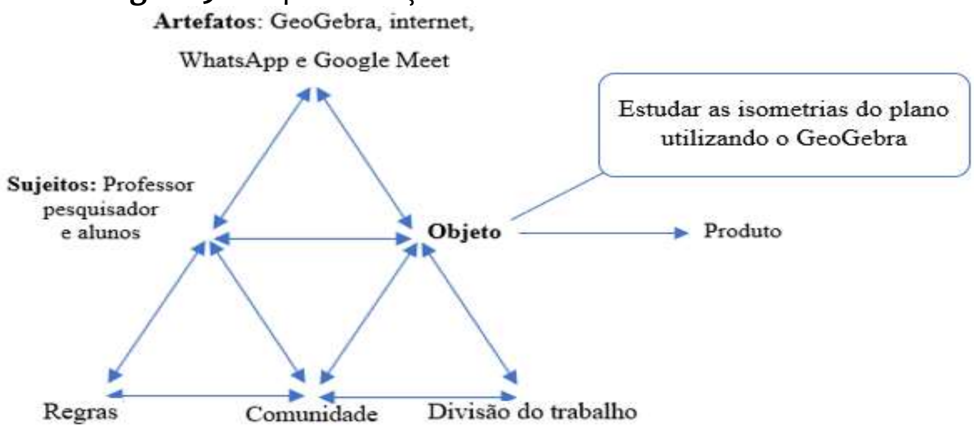
> ***Joana***: *[...] eu tenho interesse em aprofundar os meus conhecimentos em relação ao GeoGebra pra poder me ajudar na compreensão da matemática. Me parece que será interessante essa aproximação com o GeoGebra utilizando as isometrias do plano.*
>
> ***D. Oliver***: *[...] acho que lidar com as isometrias no plano do GeoGebra vai ser muito interessante, ainda mais porque o professor disse que depois vamos usá-las pra formar figuras do Tangram.*

Nos excertos acima nota-se uma convergência no que se refere ao não conhecimento das isometrias no plano do GeoGebra, bem como, um desejo dos alunos em se informar a respeito desse assunto. Essas falas sugerem que, inicialmente, a motivação do grupo era compreender as isometrias no plano utilizando o GeoGebra. Usando esse motivo como referência, podemos julgar que o objeto do sistema, nesse momento, está relacionado a estudar as isometrias do plano utilizando o GeoGebra (Figura 9).

Como a produção de dados foi realizada totalmente de forma *online*, utilizando o aplicativo *WhatsApp* e o *Google Meet* como ambientes de contato, podemos dizer que esses elementos, assim como a internet e o GeoGebra, estão exercendo a função de artefatos do sistema de atividade. Fazendo analogia com Souto (2014), nesse momento, o GeoGebra desempenha o papel de artefato, visto que havia o passo a passo orientando as construções envolvendo esse aplicativo e as isometria no plano. Ainda segundo Souto (2014), a internet, também, aparece no papel de artefato ao mediar as relações dos sujeitos entre si e com o objeto inicial do sistema de atividade: estudar as isometrias do plano utilizando o GeoGebra.

Diante do exposto, conforme figura 9, podemos esboçar uma representação triangular do sistema de atividade do referido grupo.

Figura 9 – Representação inicial do sistema de atividade.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Como é visto na representação triangular da figura 9, o professor pesquisador e os alunos fazem o papel de sujeitos do sistema e, além disso, as funções do objeto e artefatos mediadores também estão representados. A caracterização dada às regras, a forma como foi organizado o trabalho (divisão do trabalho), a representação da comunidade e a identificação do produto da atividade, serão analisados gradativamente conforme o sistema for se desenvolvendo.

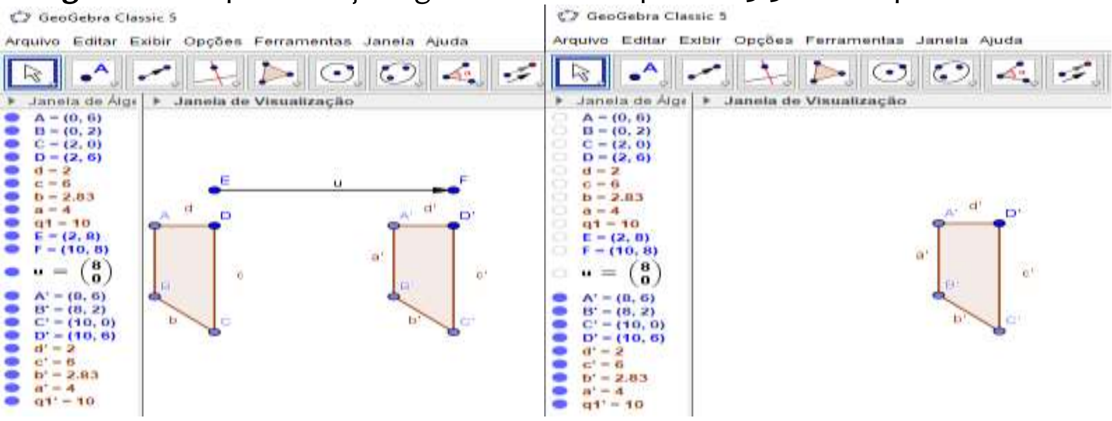
No decorrer da atividade, com o intuito de tornar os discentes membros competentes para o transcorrer da mesma, após a exposição de forma participada dos conceitos relacionados às IPG, apresentamos aos alunos alguns exercícios, anexos em Rocha (2021), abordando os conceitos básicos necessários. Depois de solucionados os exercícios, eles nos enviaram as resoluções pelo *WhatsApp* e, no encontro seguinte, fizemos as devidas observações na tentativa de dirimir as dúvidas surgidas. Esse procedimento, no sentido de promover a internalização, é sugerido por Engestrom (1999), quando o autor diz que o ciclo de expansão de aprendizagem sistêmica é iniciado com ênfase, quase que exclusiva, na internalização, preparando os novatos para que se tornem membros competentes na realização da atividade que, de forma dinâmica, segue o seu curso.

Feitos esses esclarecimentos, apresentaremos uma das intervenções realizadas pelos alunos ao solucionar a questão 3.3 abaixo, com enunciado encontrado no apêndice 2 de Rocha (2021):

> Utilizando a ferramenta , construa um polígono qualquer e, em seguida, usando a ferramenta , trace um vetor externo ao polígono construído. A seguir, usando a ferramenta , clique no polígono construído e depois no vetor traçado para obter uma isometria de translação por um vetor. Conclua, ocultando as figuras e elementos precendentes às movimentações

Para realizar tal construção, o aluno D. Oliver, por meio do *software* GeoGebra e, também, fazendo uso dos conceitos básicos trabalhados pelo professor pesquisador, apresentou a proposta representada na figura 10.

Figura 10 – Representações geométricas da questão 3.3 criadas por **D. Oliver**.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Durante esse exercício, que explora a translação de uma figura por um vetor e solicita a ocultação das figuras que precedem a translação, como o próprio enunciado se apresenta em forma de um roteiro bem detalhado, o aluno realizou a tarefa de forma satisfatória e, sendo assim, não identificamos a presença de tensões originadas por questionamentos e insatisfações. O treinamento do indivíduo, segundo Engeström (1987), considerando a historicidade e a internalização, é necessário no sentido de prepará-lo para participação ativa na atividade. Julgamos que, de acordo com as manifestações entre os alunos (excerto abaixo), esse processo não se configurou como um objeto do sistema de atividade (Engeström, 1987), no sentido de constituir um obstáculo a ser superado:

> ***Samuel***: *[...] pra mim foi fácil, bastou seguir o passo a passo.*
>
> ***Kleber***: *[...] até agora tá fácil. Bastou seguir o passo a passo. Mas depois, pra montar as figuras do Tangram teremos que tomar decisões e usar a criatividade.*

Diante da situação, acreditamos que, nesse momento, esses conceitos básicos de isometria do plano realizam o papel de artefato do sistema de atividade.

e-ISSN: 2595-4881

No encontro do dia 26 de março de 2021, quando Kleber estava fazendo o compartilhamento das movimentações para os colegas, D. Oliver, que havia construído a representação geométrica indicada na figura 10, demonstrou uma insatisfação em relação à forma como a translação por um vetor é sugerida, tanto no passo a passo do roteiro da tarefa, quanto na orientação dada pelo próprio *software* GeoGebra, localizada abaixo do ícone , onde diz 'selecione primeiro o objeto a ser transladado e, depois, um vetor'.

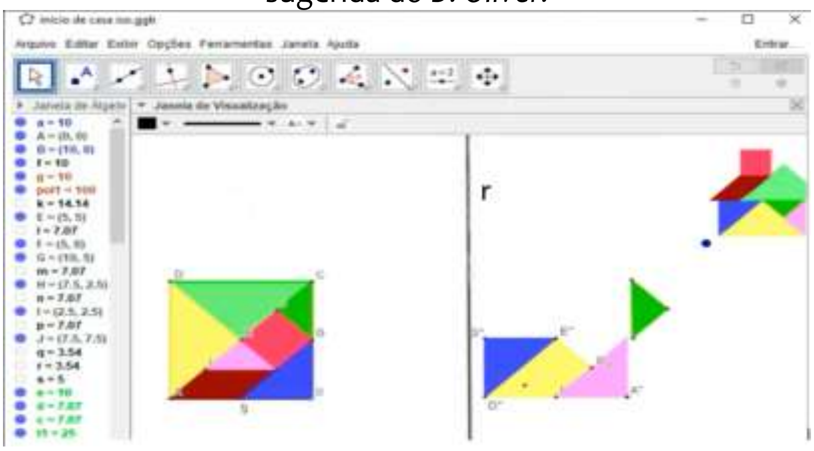
> ***D. Oliver**: [...] a translação é bem "demoradinha" de fazer de acordo com as dicas. Vamos fazer diferente a movimentação do triângulo verdinho? Vamos fazer uma reta* (r) *aí no meio e realizar uma reflexão por uma reta* (vide figura 11).

Kleber e *Eneaga* acham engraçado e riem. *D. Oliver* continua:

> ***D. Oliver**: [...] aí a gente vai mexer na reta* (r) *até o triângulo verdinho ficar no ponto que a gente quer.*

Os discentes, principalmente D. Oliver, foram sugerindo os movimentos até Kleber colocar o triângulo pequeno verde em uma posição razoavelmente favorável, na formação da 'casinha' conforme a figura 11.

Figura 11– Substituição da translação por um vetor pela reflexão em relação à uma reta sugerida do *D. Oliver.*



Fonte: Dados da pesquisa (2021), conforme Rocha (2021).

Observamos que essa insatisfação de D. Oliver em relação a orientação dada pelo GeoGebra para realizar translação por um vetor o motivou a substituir essa isometria do plano pela reflexão por uma reta. Entretanto, essa substituição isométrica não surtiu o efeito desejado de forma eficiente, por não haver precisão na posição do triângulo após a

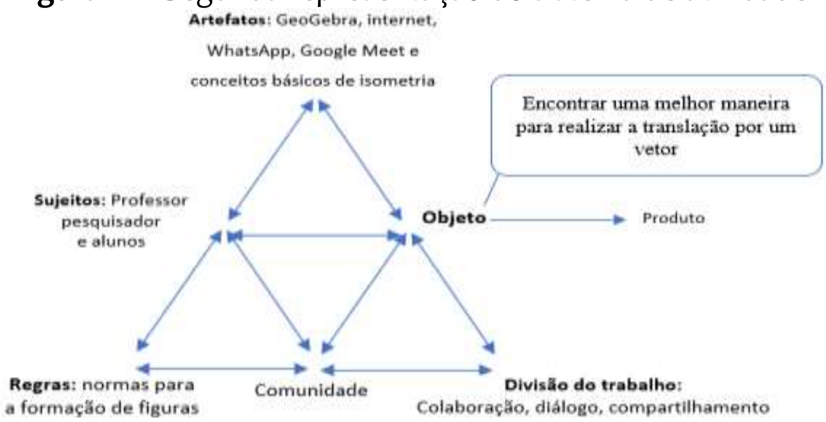
e-ISSN: 2595-4881

realização da reflexão (vide figura 11). Situações como essa são previstas por Engestrom (1987), quando ele diz que as pessoas que participam de uma atividade, às vezes, sentem que não é favorável continuar realizando procedimentos da mesma forma que anteriormente, porém elas ainda não sabem o que deve ser feito para solucionar a situação.

Antes da manifestação de D. Oliver, os colegas seguiam obedientemente as orientações oferecidas pelo GeoGebra e as dicas dadas no passo a passo da tarefa. Presumimos, assim, que havia uma predominância do processo de internalização (Engestrom 1999), ou seja, a reprodução de formas usuais nos processos de isometria no plano. Entretanto, após o posicionamento de D. Oliver foi manifestada a existência de procedimentos diferentes, que poderiam ser adotados pelos colegas e, por que não, pelo professor pesquisador. Segundo Engeström (1999), essa situação pode indicar o começo de um processo de externalização e, sendo assim, é possível que anuncie um marco, iniciando um miniciclo de aprendizagem potencialmente expansiva, pois representa o interesse do grupo na busca pelo desconhecido. Veremos que, nos encontros seguintes, esse processo de externalização irá avançar.

Na figura 12, a representação triangular do sistema de atividade indica a inclusão dos conceitos básicos de isometria como artefato do sistema. Nesse sentido, mediante a participação coletiva dos alunos nessa etapa da atividade, expressamos essa interatividade na divisão (organização) do trabalho.

Figura 12 – Segunda representação do sistema de atividade.

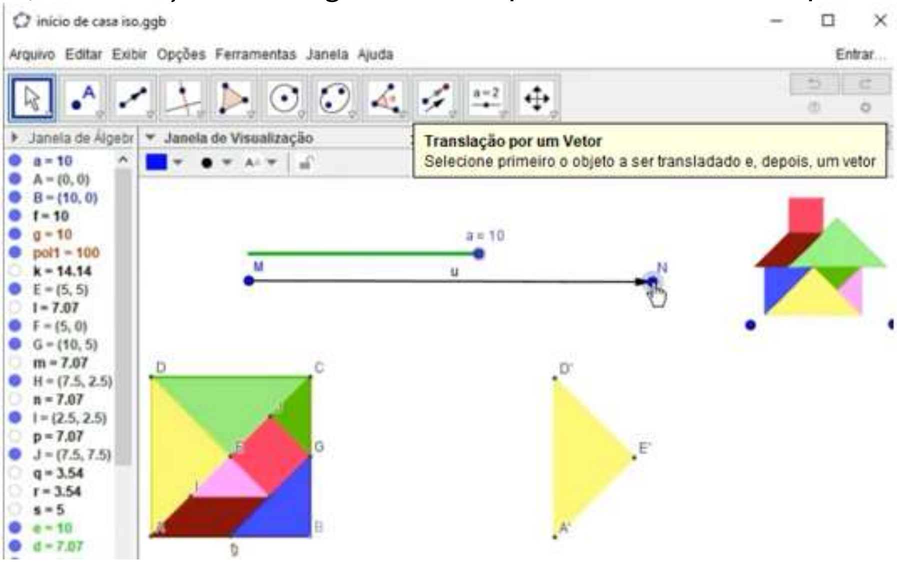


Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Outra informação que aparece na representação triangular do sistema de atividade refere-se ao seu objeto (Figura 12). Nessa etapa da atividade, a motivação do grupo era a insatisfação pelas orientações dadas para realizar a translação por um vetor. Ao usar esse motivo como referência, podemos conjecturar que o objeto do sistema, nesse momento, refere-se a encontrar uma melhor maneira para realizar a translação por um vetor.

No encontro seguinte, o movimento impreciso sugerido por D. Oliver os impulsionou a retornar ao início da formação da ‘casinha’ (Figura 13).

Figura 13– Translação do triângulo amarelo pelo vetor $\vec{u}$ realizada pelos alunos.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

No retorno à tarefa, tivemos, inicialmente, o seguinte excerto:

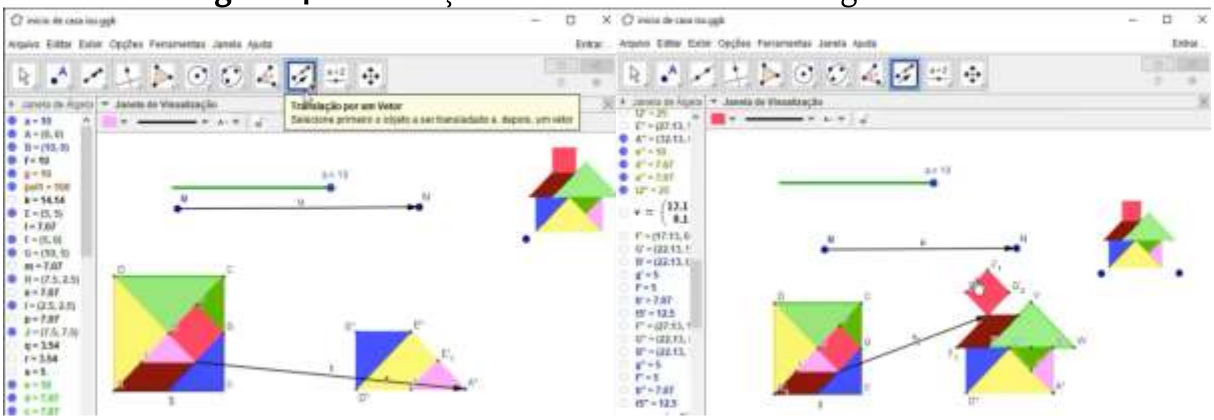
> ***Kleber***: *[...] eu acho que a melhor forma pra começar, é essa amarelinha aí. Esse triângulo.*
>
> ***Robério (professor pesquisador)***: *Vocês vão fazer que tipo de movimento nele?*
>
> ***D. Oliver***: *Acho que transladar é a melhor opção, professor!*

Kleber, que estava realizando a apresentação da formação da figura, juntamente com os colegas, tomava as decisões em relação às transformações isométricas. De início, conforme mostra a figura 13, eles transladaram o triângulo amarelo pelo vetor $\vec{u}$, de acordo com a movimentação realizada na figura 10, seguindo o passo a passo da tarefa que é baseada na orientação do próprio GeoGebra.

Cenas Educacionais
e-ISSN: 2595-4881

Entretanto, no decorrer das movimentações das peças do Tangram, provavelmente, movido pela insatisfação demonstrada por D. Oliver, Kleber sugere uma estratégia de translação por um vetor totalmente nova para o grupo, inclusive para o professor pesquisador, quando diz: "não é melhor fazer essa translação assim?". Kleber, conforme figura 14, com o auxílio dos colegas e aprovação do professor, através de uma nova estratégia, clica no ícone de isometria de translação por vetor. Em seguida, contrariando o procedimento determinado pela orientação do próprio GeoGebra, clica na figura que deseja transladar, depois no ponto referencial desse triângulo e, por último, clica no destino desejado para a translação do ponto referencial. Dessa forma, o triângulo rosa foi transladado para a posição desejada de forma bem mais prática e precisa, dispensando a construção de um vetor à parte, como tinha sido feito anteriormente. Esse novo procedimento é repetido em outras oportunidades, por exemplo, para transladar o quadrado, como é representado na figura 14.

Figura 14 – Translações utilizando a nova estratégia de Kleber.

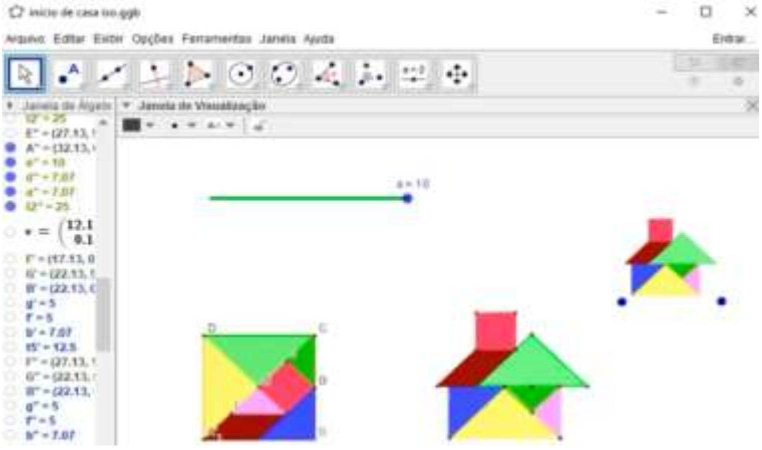


Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

De acordo com Tikhomirov (1981), essas percepções (nesse caso, a percepção do aluno Kleber) decorrem da reorganização do pensamento que, provavelmente, foi favorecida pela exploração da dinamicidade e interatividade do próprio GeoGebra durante as construções realizadas pelos alunos.

Executando as translações e demais IPG necessárias para a formação da figura de Tangram, os alunos chegaram à representação gráfica indicada na figura 15.

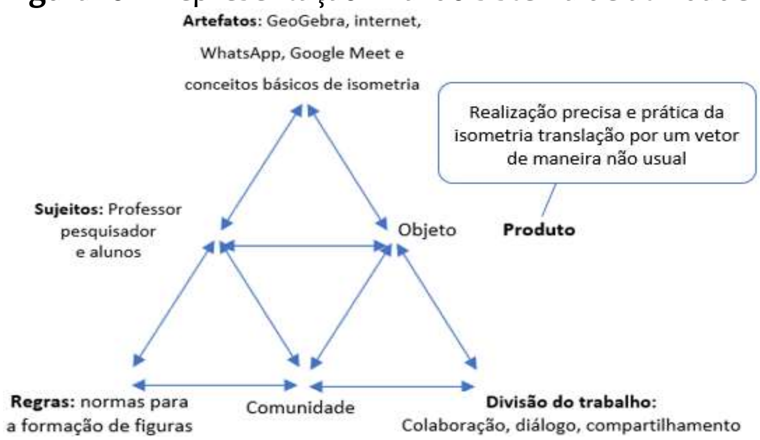
Figura 15 – Figura formada pelos alunos.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Ao concluir a formação da figura desejada, verificamos que a nova estratégia para translação das peças do Tangram foi aplicada eficientemente pelos sujeitos da atividade. Os *feedbacks* do GeoGebra contribuíram para a reorganização do pensamento dos alunos, fazendo com que eles buscassem estratégias para realizar a movimentação isométrica de uma forma não prevista pelo professor pesquisador. Nesse sentido, podemos dizer que o primeiro miniciclo potencialmente expansivo foi concluído e, portanto, acreditamos que existem indícios de ter ocorrido uma aprendizagem potencialmente expansiva, visto que os alunos desenvolveram uma estratégia inédita e legitimada pelo professor pesquisador, atenuando a tensão inicial e criando um novo padrão de procedimentos para a atividade em curso. Acreditamos também que a representação triangular final desse sistema de atividade pode ser observada na figura 16.

Figura 16 – Representação final do sistema de atividade.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

e-ISSN: 2595-4881

Nessa representação final, destacamos o produto da atividade resultante das transformações do sistema que, nesse episódio, poder ser entendido como realização precisa e prática da isometria translação por um vetor de maneira não usual.

Episódio 2: Divergência gerada pela percepção, por parte dos alunos, da inutilidade da isometria *reflexão em relação a um ponto* para a formação de figuras do Tangram.

Nas manifestações realizadas no ambiente *WhatsApp*, os alunos, frequentemente, se referiam às formações de figuras do Tangram fazendo uso das IPG como um desafio. Por exemplo, quando eles foram questionados a respeito da diferença entre as tarefas envolvendo os conceitos preliminares de IPG e outras tarefas envolvendo a montagem de figuras do Tangram utilizando essas isometrias, tivemos essas manifestações:

> ***Kleber**: [...] utilizamos os conceitos da última aula, mas agora tivemos que tomar decisões e utilizar da criatividade para a confecção da figura requisitada;*
>
> ***D. Oliver**: [...] a diferença foi a aplicação dentro de um contexto - o Tangram -, que traz um sentido maior para esses movimentos de isometria;*
>
> ***Samuel**: [...] a diferença foi que na primeira atividade foram figuras mais simples e o conceito isolado na segunda houve uma exigência maior da nossa parte ...*

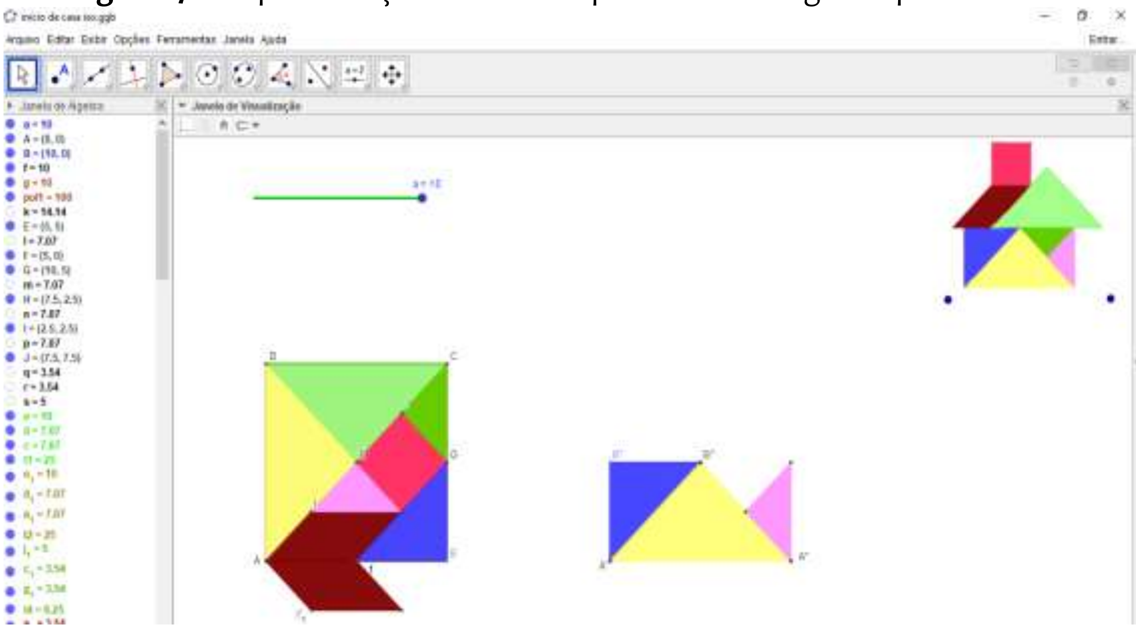
Entendemos que excertos como esses indicam um ambiente fértil em que podem ser alavancados miniciclos potencialmente expansivos. Nesses contextos, os alunos, corroborando com o princípio da historicidade de um sistema de atividade (ENGESTRÖM, 1987), deixam simplesmente de replicar o uso das IPG de acordo com os roteiros preestabelecidos (Figura 10) e passam, também, a ter a necessidade de tomar decisões, como por exemplo, sobre qual peça do Tangram devem movimentar primeiro e, como e qual IPG deve ser realizada.

No encontro do dia 16 de abril, com o compartilhamento feito por Kleber no *Google Meet*, os alunos estavam tentando posicionar o paralelogramo irregular de acordo com a posição em que ele se encontrava na figura da 'casinha'. Como esse paralelogramo estava

e-ISSN: 2595-4881

numa posição invertida na figura a ser formada, eles utilizaram as isometrias de *rotação* e, em seguida, *reflexão por um ponto*, não obtendo sucesso. Após esse procedimento, Eneaga comentou: "Não adiantou nada". Depois dessas duas tentativas, D. Oliver sugeriu: "[...] ah, vamos fazer uma reflexão por uma reta" (Figura 17).

Figura 17 – Representação da reflexão por uma reta sugerida por *D. Oliver.*



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

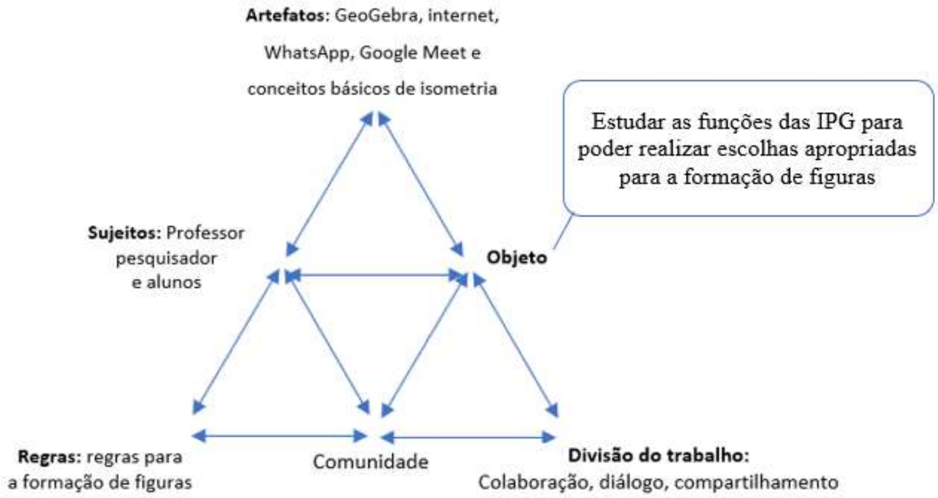
Após a realização da *reflexão em relação a uma reta* representada na figura 17, e obtendo êxito por meio dessa isometria, os alunos concluíram a movimentação do paralelogramo com uma rotação, seguida de uma translação por um vetor, para posicioná-lo acima do triângulo azul, atendendo a sua posição na figura da 'casinha'.

Todo esse contexto sugere que, nesse momento, o grupo estava motivado para explorar a utilização das isometrias no plano do GeoGebra. Tendo esse motivo como referência, podemos conjecturar que o objeto do sistema se refere a estudar as funções das IPG para poder realizar escolhas apropriadas para a formação de figuras.

Nesse instante, a interpretação triangular desse sistema de atividade pode ser representada conforme a figura 18.

e-ISSN: 2595-4881

Figura 18 – Representação inicial do sistema de atividade.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Nessa representação triangular temos o professor pesquisador e os alunos como sujeitos do sistema. Devido a pesquisa continuar no formato remoto, a internet, *Google Meet* e *WhatsApp*, por intermediarem as relações estabelecidas entre sujeitos da atividade, continuam realizando o papel de artefato. Conforme mencionado e justificado no episódio anterior, os conceitos básicos das isometrias foram internalizados pelos alunos a partir do momento que eles conseguiram formar as figuras do Tangram utilizando as IPG. Sendo assim, nesse momento, acreditamos que esses conceitos básicos estão fazendo o papel de artefato. As regras para formação de figuras, também são mantidas e a divisão do trabalho é representada pela colaboração, diálogo e compartilhamento, o qual foi feito pelo aluno Kleber.

O encontro seguinte ao do dia 16 de abril havia sido marcado para quinze dias depois. Porém, nessa data, os alunos tinham um compromisso com a Olimpíada de Brasileira de Biologia (OBB). Diante disso, a fim de não os prejudicar, conforme o estabelecido na Declaração de Anuência da Escola, adiamos o encontro para a semana seguinte, dia 07 de maio. De certa forma, essa situação teve o seu aspecto positivo, já que os discentes tiveram uma semana adicional para se dedicarem à manipulação do GeoGebra. Sugerimos a eles que durante o período em que estivessem realizando as formações de figuras, explorassem ao máximo essa tecnologia, pois, segundo Borba, Silva e Gadanidis (2014), ela favorece a investigação, propiciando o surgimento de conjecturas.

Logo no início do encontro do dia 07 de maio, identificamos uma situação que, para nós, implicava no surgimento do segundo miniciclo potencialmente expansivo, uma vez que ao perguntarmos aos discentes quais percepções eles tiveram a respeito das IPG, deu-se início o seguinte excerto:

> ***Robério***: *[...] O que vocês perceberam em relação às IPG?*
>
> ***Kleber***: *[...] que nem todas são úteis.*
>
> ***Robério***: *Nem todas são necessárias?*
>
> ***D. Oliver***: *Isso mesmo. Mas, por que existe as quatro, então?*
>
> ***Kleber***: *[...] percebi que não é preciso usar a reflexão por um ponto.*

Julgamos que a afirmação do aluno Kleber, ao dizer que nem todas as IPG são úteis/necessárias, é uma iniciativa para alterar um padrão que havia sido posto para eles. Não podemos perder de vista que, nas orientações iniciais da pesquisa, dissemos que os alunos deveriam montar as figuras do Tangram utilizando as quatro IPG. A nosso ver, essa observação de Kleber sugere a alteração das regras de procedimentos, já que estaríamos excluindo, sem prejuízo na formação de qualquer figura, a reflexão em relação a um ponto.

Essa situação é prevista por Engeström (1987), quando explica que sistemas de atividades são abertos. Sendo assim, a introdução de algo novo, como por exemplo, regras e artefatos, podem provocar contradições internas, que, por sua vez, impulsionam o sistema para uma mudança. É interessante destacar, também, o questionamento de D. Oliver, quando pergunta por que foram apresentadas as quatro isometrias, se uma delas não era necessária para as nossas transformações.

Diante do exposto, reiteramos que essa discordância do aluno Kleber em relação à necessidade do uso das quatro IPG, apresentando uma nova alternativa, tem a possibilidade de alavancar uma aprendizagem potencialmente expansiva. Porém, Kleber não apresentou argumentos que justificassem a exclusão da isometria reflexão *por um ponto* dentre as IPG necessárias para a formação das figuras de Tangram. Entretanto, o aluno Eneaga, como veremos a seguir irá apresentar conjecturas que justificarão a existência de uma equivalência que tornará uma das isometrias dispensáveis.

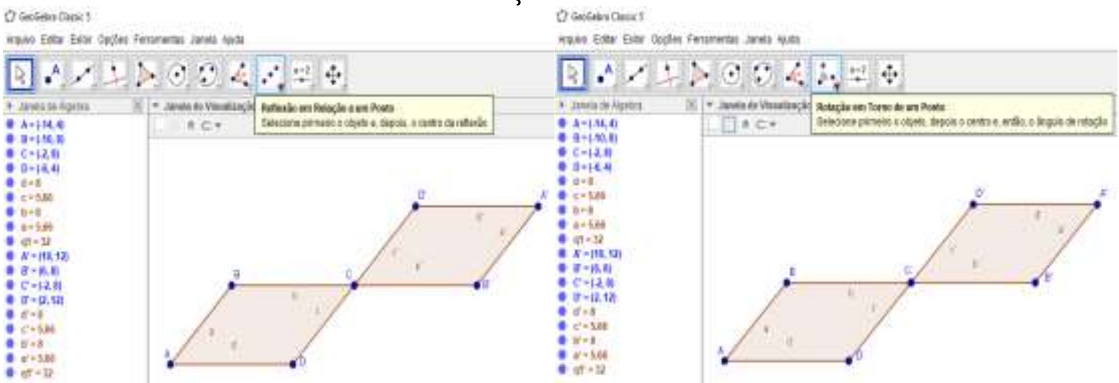
Em certo momento desse mesmo encontro, na formação da figura de um 'gatinho', ao indagarmos sobre o que acontecia com uma das peças do Tangram na realização da isometria de reflexão por um ponto, Eneaga, acreditamos que devido à manipulação do GeoGebra que favorece a reorganização do pensamento, respondeu:

e-ISSN: 2595-4881

> ***Eneaga**: [...] a figura só rotacionou 180°. [...] eu apliquei as duas isometrias - isometria de reflexão por um ponto e rotação de 180° em torno desse ponto no paralelogramo - e a posição das figuras depois da aplicação ficou a mesma.*

A afirmação de Eneaga, que corrobora e justifica a percepção de Kleber, ao dizer que uma reflexão por um ponto é equivalente a uma rotação de 180° pode ser comprovada conforme figura 19, quando o aluno, com auxílio dos colegas, realizou essas duas isometrias em um paralelogramo e notamos que a posição da figura rotacionada em 180° em relação a um ponto e a refletida em relação ao mesmo ponto é a mesma.

Figura 19 –Equivalência dita por ***Eneaga*** envolvendo uma reflexão por um ponto a uma rotação de 180°.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021)

Depois de realizadas as duas isometrias, Kleber perguntou a Eneaga como ele poderia afirmar que as figuras, após as respectivas movimentações, estavam em posição equivalente e ele respondeu o seguinte:

> ***Eneaga:** [...] é só observar e comparar as coordenadas dos vértices delas.*

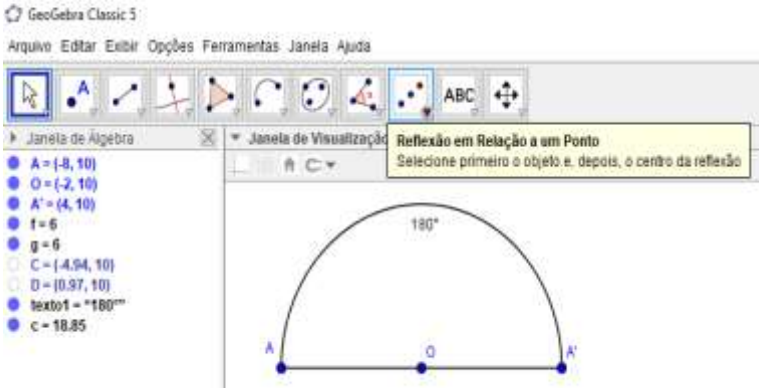
De fato, observando as duas representações da figura 19, podemos perceber que as coordenadas dos vértices do paralelogramo refletidas em relação ao ponto C são as mesmas do paralelogramo rotacionado por 180° em relação, também, ao ponto C.

Para melhor ilustrar essa equivalência, realizamos com os alunos essas isometrias, envolvendo demais peças do Tangram e sempre obtivemos o resultando de figuras equivalentes. Reforçamos que essa equivalência também pode ser demonstrada de forma mais genérica e rigorosa utilizando a definição dada por Lima (2007), quando afirma que isometria de reflexão em relação a um ponto O é a transformação geométrica que associa a cada ponto A do plano, um ponto A' tal que:

- Se A = O, então A’ = O
- Se A é diferente de O então A’ está na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{OA}$ e os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ são congruentes.

Apresentamos, na figura 20, a reflexão segundo um ponto O, construída no GeoGebra e confirmamos que dada uma reflexão de um determinado ponto em torno de um outro ponto, essa isometria, conforme rotação envolvendo os pontos A e A’, é equivalente a uma rotação de 180°, tornado a isometria de reflexão por um ponto, como disse Kleber, desnecessária para as formações de figuras do Tangram.

Figura 20 – Reflexão do ponto A em torno do ponto O.

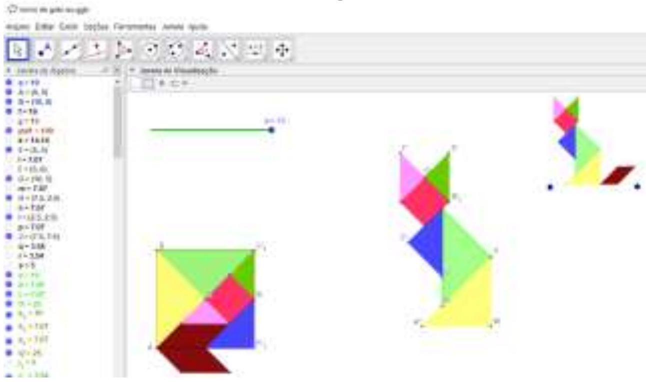


Fonte: Elaborada pelos autores , conforme Rocha (2021).

É necessário dizer que no exemplo da figura 20 temos a reflexão de um ponto em relação a outro ponto. Mas, como as figuras geométricas são formadas por uma infinidade de pontos, essa demonstração é válida, também, para as figuras que representam as peças do Tangram.

Ademais, para que eles pudessem realizar o movimento necessário na formação do ‘gatinho’, conforme a figura 21, tiveram que fazer uma reflexão em relação à reta suporte da base do paralelogramo. Fazendo esse movimento, tornou-se possível a realização de uma rotação de 45° no sentido anti-horário, deixando assim, o lado menor do paralelogramo no sentido horizontal e a inclinação desse paralelogramo para direita, como indicado na imagem a ser montada. Nessa situação, a reflexão em relação à reta foi imprescindível, porém a reflexão por um ponto seria dispensável, como afirmou Kleber anteriormente.

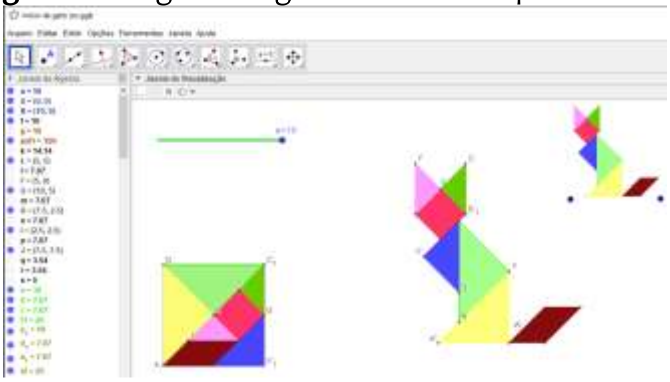
Figura 21 – Isometria realizada pelos alunos na reflexão em relação a uma reta no paralelogramo.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Tal como no miniciclo anterior, um novo padrão para a atividade se estabelece a partir das inferências e conjecturas apresentadas pelos alunos, à medida que passamos a aceitar e reforçar os critérios utilizados por eles em relação às IPG realmente necessárias para realizar a formação de figuras do Tangram. Finalizando a construção, conforme a figura 22, eles concluíram a formação da figura do 'gatinho' com as peças do Tangram, utilizando apenas três das IPG, sendo elas a rotação em torno de um ponto, a reflexão em relação a uma reta e a translação por um vetor.

Figura 22 – Figura do 'gatinho' formada pelos alunos.



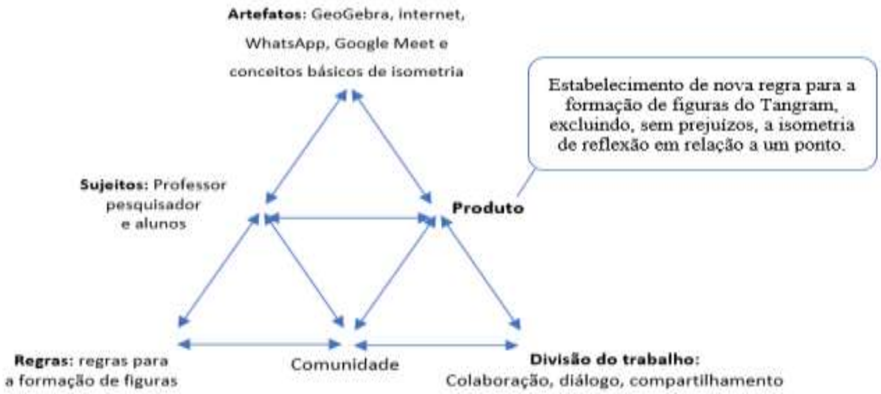
Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Após a formação da referida figura nas condições apresentadas pelos alunos e validadas pelo professor pesquisador, acreditamos que há indícios de que o segundo miniciclo potencialmente expansivo esteja se encaminhando para o final. Sendo assim, conforme os princípios teóricos de Engeström e Sannino (2010), julgamos que há indicativos da manifestação de uma aprendizagem com potencial expansivo.

e-ISSN: 2595-4881

Diante do exposto, a representação triangular final desse sistema de atividade pode ser observada na figura 23.

Figura 23 – Representação final do sistema de atividade.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Na figura 23, na qual apresentamos a representação final do sistema, temos como destaque o produto da atividade, sugerindo o resultado da transformação do sistema que, nesse caso, pode ser entendido como o estabelecimento de uma nova regra para a formação de figuras do Tangram, excluindo, sem prejuízos, a isometria de reflexão em relação a um ponto.

Episódio 3: Exemplo de uma aprendizagem de nível II na escala de Bateson

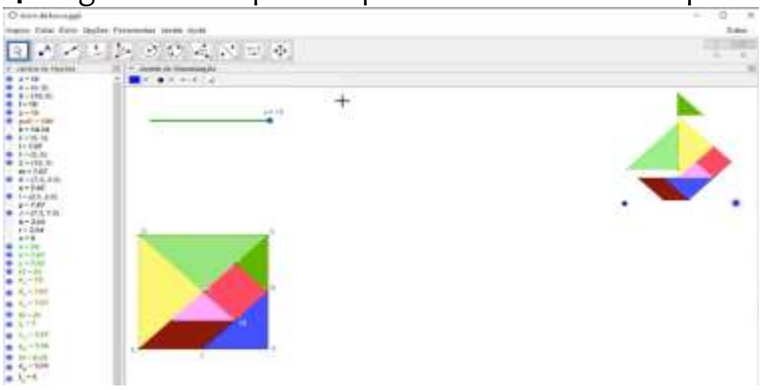
Dentre as aprendizagens ocorridas durante a nossa pesquisa, destacamos também, uma manifestada no dia 07 de maio de 2021, quando os alunos descartam, durante a formação da imagem do 'barquinho' representado na figura 24, a utilização da reflexão por uma reta, colocando como necessárias apenas a rotação por um ponto e a translação por um vetor para a formação da figura desejada, conforme excerto abaixo.

> ***Robério**: E aí, o que vocês percebem em relação à formação dessa figura?*
>
> ***Kleber**: [...] acho que não vai precisar refletir o paralelogramo.*
>
> ***Robério**: Tem certeza? Por que não vai precisar?*
>
> ***Kleber**: Porque ele só está rotacionado.*
>
> ***Robério**: Então, mãos à obra.*

Diante desses comentários, percebemos a iniciativa dos alunos em dizer que, nessa formação de figura, não seria necessária a utilização da reflexão por uma reta. O aluno D. Oliver, que estava conduzindo as movimentações das peças e realizando a apresentação para os colegas no *Google Meet*, disse sorrindo:

> ***D. Oliver****: Agora são vocês que vão me dar as ordens (risos).*

Figura 24 – Figura do 'barquinho' que deveria ser formada pelos alunos.



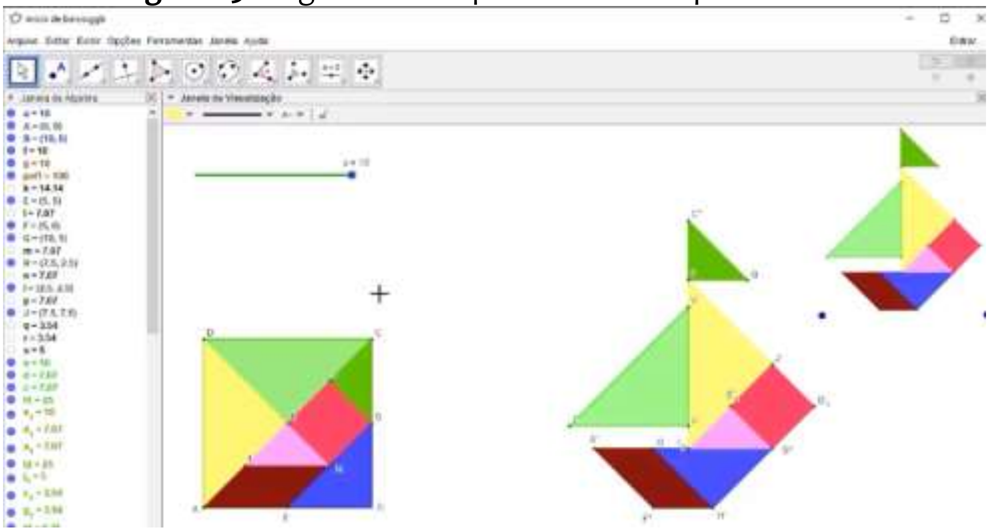
Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Instantes depois dos alunos iniciarem a formação da figura (no segundo episódio eles já haviam colocado como desnecessária, em qualquer situação, a utilização da reflexão por um ponto) questionamos a eles, para reforçar o seu posicionamento, quais IPG seriam necessárias para a formação da figura atual.

> ***Robério****: [...] E nessa situação, é necessário vocês utilizarem quais IPG para formar essa figura?*
>
> ***Joana****: Rotação e translação.*
>
> ***Robério****: Só? O que vai determinar essa situação?*
>
> ***D. Oliver****: A posição do paralelogramo.*

Confirmando as inferências de Kleber, Joana e D. Oliver, após as movimentações das peças do Tangram utilizando apenas as duas IPG (estratégia criada, muito provavelmente, graças às conjecturas possibilitadas pela dinamicidade do GeoGebra) os alunos, conforme figura 25, conseguiram formar a figura desejada.

Figura 25 – Figura do 'barquinho' formada pelos alunos.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

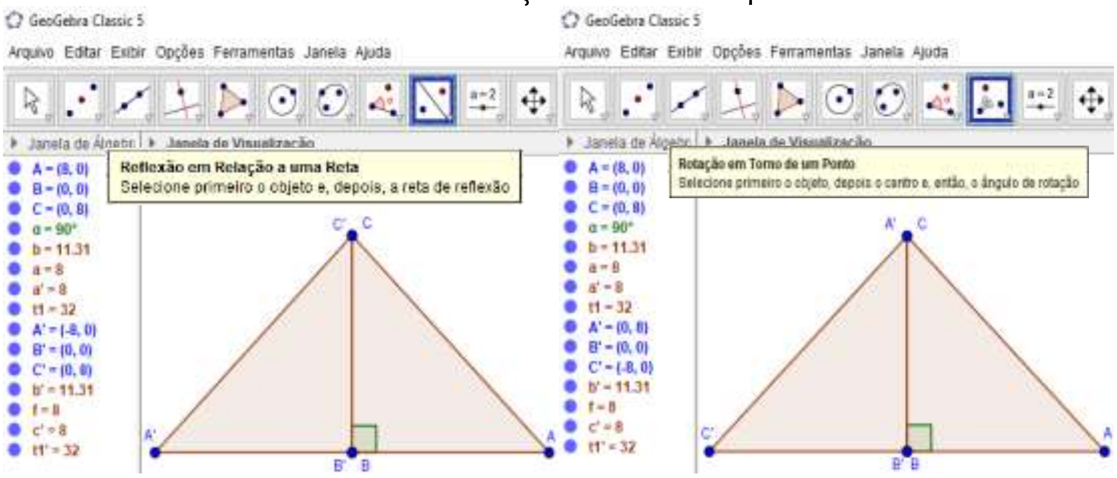
Como mencionado, a figura específica foi formada utilizando apenas as duas IPG supracitadas. Porém, como garantir que em outras figuras onde o paralelogramo estiver apenas rotacionado essa estratégia será válida? Conforme excerto seguinte, questionamos aos alunos acerca dessa situação.

> ***Robério***: *[...] pronto! Deu pra constatar que, nesse caso, de fato, quando o paralelogramo está apenas rotacionado, basta essas duas IPG, né? E como garantir que em qualquer figura (cujo paralelogramo só estiver rotacionado) essa proposta será válida?*
>
> ***Kleber***: *Porque os triângulos são retângulos isósceles.*
>
> ***Robério***: *Aí, em qualquer posição que ele esteja, a rotação e a translação são suficientes. Isso é justificado pelo que Kleber falou, já que o Tangram é formado por triângulos retângulos isósceles, pelo quadrado e pelo paralelogramo.*

Em outras palavras, nos excertos anteriores, os alunos afirmam que, quando o paralelogramo na figura a ser formada só está rotacionado, é desnecessária a utilização das duas isometrias de reflexão para a formação de figuras.

No encontro seguinte, conforme as figuras 26 e 27, mostramos, com a participação ativa dos alunos, que as reflexões em relação a uma reta em um triângulo retângulo isósceles são equivalentes a específicas rotações em torno de um ponto.

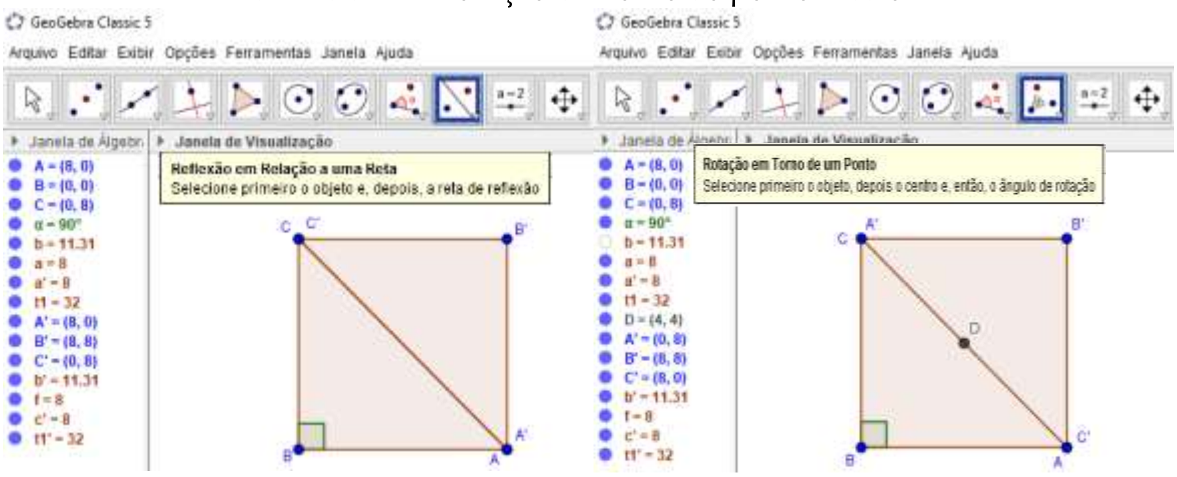
Figura 26 – Constatação da equivalência entre a reflexão do triângulo ABC em relação à reta $\overline{BC}$ e a sua rotação em torno do ponto B.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021)

Analisando a figura 27, identificamos a equivalência entre as coordenadas dos pontos correspondentes na isometria reflexão do triângulo ABC em relação à reta $\overline{BC}$, e isometria de rotação de 90°, sentido anti-horário, em torno do ponto B do triângulo ABC. Salientamos que, em relação ao cateto $\overline{BA}$, utilizamos raciocínio análogo.

Figura 27– Constatação da equivalência entre a reflexão do triângulo ABC em relação à reta $\overline{AC}$ e a sua rotação em torno do ponto médio D.



Fonte: Dados da pesquisa, conforme Rocha (2021).

Assim como feito na figura 26, ao analisarmos a figura 27, identificamos a equivalência entre as coordenadas dos pontos correspondentes na isometria de reflexão do triângulo ABC em relação à reta $\overline{AC}$, e isometria de rotação de 180° em torno do ponto médio D do triângulo ABC.

Como já mencionado anteriormente, para Engeström (2001) a TAE tem suas origens nos estudos de Bateson (1972), que distingue três níveis de aprendizagem. Considerando Souto (2014), ao enfatizar que as aprendizagens expansivas são difíceis de ocorrer, julgamos que a aprendizagem ocorrida nessa situação se adequa ao nível II, pois refere-se essencialmente à internalização de regras e padrões já estabelecidos, tendo como diferencial, no caso específico, análise prévia da figura a ser formada, objetivando identificar se o paralelogramo está apenas rotacionado e, em caso positivo, estrategicamente, focar-se apenas com a utilização das isometrias de rotação e translação. Dessa forma, não caracterizamos como aprendizagem com potencial expansivo a manifestada nessa situação, visto que Engeström (1987) desenvolveu a TAE a partir do nível III.

Considerações

A análise por intermédio dos miniciclos potencialmente expansivos de ações de aprendizagem nos revelou indícios de aprendizagens não previstas no planejamento prévio do professor pesquisador, potencializadas pelo *software* GeoGebra na formação de figuras de Tangram, utilizando as isometrias no plano desse artefato tecnológico. Essa pesquisa corrobora com o ponto de vista de que o GeoGebra vem ganhando destaque na área de Educação Matemática, por estar sempre sendo atualizado e por permitir ao usuário compreender, analisar e tirar conclusões a respeito do que é observado na tela. Essa característica do GeoGebra também pode ser constatada de forma empírica em nossa pesquisa, quando questionamos os discentes, no ambiente do *WhatsApp*, sobre as impressões deixadas pela manipulação do *software* e um deles mencionou que o GeoGebra é muito visual, ultrapassando a teoria e tornando o aprendizado mais dinâmico e criativo, o que o contribui significativamente para assimilação dos conceitos.

Possibilitamos, em nossa pesquisa, um contexto de crítica que expande o significado de alguns procedimentos usados na formação de figuras do Tangram, utilizando as IPG. Nossa análise nos mostrou indicativos da ocorrência de aprendizagens com potencial expansivo, indo além da internalização de procedimentos que fazem parte de padrões preestabelecidos.

e-ISSN: 2595-4881

Entretanto, também constatamos que, como a própria TA propõe, não é comum o desenvolvimento de todas as fases de um miniciclo de aprendizagem expansiva. Sendo assim, é possível conjecturar que educadores, em oportunidades futuras, poderão produzir novos significados sobre determinado estudo. Salientamos que o fato de um miniciclo não ter sido desenvolvido por completo não significa a ausência de aprendizagem, considerando que toda relação humana implica um aprendizado.

Finalizando, cabe destacar o papel do professor pesquisador na perspectiva da TA, visto que ela potencializa o surgimento de situações em que o pesquisador é solicitado a auxiliar no surgimento e na superação das tensões proporcionadas pelos miniciclos potencialmente expansivos. Nessa perspectiva, como uma legítima pesquisa em Educação Matemática, estudos dessa natureza sugerem momentos que oportunizam a manifestação de movimentos expansivos para o próprio pesquisador como sujeito do sistema.

Referências

BATESON, G. **Steps to an ecology of mind**. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1972.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

CENCI, A.; DAMIANI, M. F. Desenvolvimento da Teoria Histórico-Cultural da Atividade em três gerações: Vygotsky, Leontiev e Engeström. **Roteiro**, v.43, n.3, p.919-948, 2018.

DAVID, M. M; TOMAZ, V. S. Aprendizagens Expansivas Reveladas pela Pesquisa sobre a Atividade Matemática na Sala de Aula. **Bolema**, v.29, n.53, p.1287, 2015.

ENGESTRÖM, Y. De experimentos de design a intervenções formativas. **Teoria e psicologia**, v.21, n.5, p.598-628, 2011.

ENGESTRÖM, Y. Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. **Journal of Education and Work**, v.14, n.1, p.133-156, 2001. Disponível em: <http://www.informaworld.com/smpp/title~content=t713430545>. Último acesso em 15/07/2023.

ENGESTRÖM, Y. **Learning by Expanding**: An Activity - Theoretical Approach to Developmental Research. Orienta-Konsultit, Helsinki, 1987. Disponível em: <https://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/> Último acesso em 15/07/2023.

ENGESTRÖM, Y. **Learning by expanding**: ten years after. 1999. Disponível em: < https://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm.> Último acesso em 15/07/2023.

ENGESTRÖM, Y. Non scolae sed vitae discimus: Toward overcoming the encapsulation of school learning. **Learning and Instruction**, v.1, n.3, p.243-259, 1991.

ENGESTRÖM, Y; SANNINO, A. Studies of expansive learning: Foundations, findings, and future challenges. **Educational Research Review**, v.5, 2010.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria de desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia, personalidade**. La Habana: Pueblo y Educación, 1983.

LIMA, E. L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, N. V.; CUNHA, D. M. Ergologia, saberes e análise do trabalho docente: a prática dos professores da educação profissional. **Trabajo, Actividad y Subjetividad**, Córdoba: Escritos entre Pares Simpósio, p.105-117, 2018.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

KUUTTI, K. et al. A teoria da atividade como uma estrutura potencial para a pesquisa de interação humano-computador. **Contexto e consciência**: teoria da atividade e interação humano-computador , v.1744, p.22/09, 1996.

NUNES, V. F. R. **O que são isometrias**?, matematica.pt. 2021. Disponível em: <https://www.matematica.pt/faq/isometrias.php#google_vignette> Último acesso em 15/07/2023.

RIBEIRO, E. M. P. et al. **Sequência didática**: Tangram. Sombrio: IFC, 2012.

ROCHA, R. P. Construções geométricas das figuras do Tangram por meio das isometrias no plano do GeoGebra: análise das estratégias dos alunos com base na teoria da atividade. 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2021. Disponível em: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://www2.uesb.br/ppg/ppgen/wp-content/uploads/2022/06/Disserta%C3%A7%C3%A3o-final-Rob%C3%A9rio.pdf. Último acesso em 15/07/2023.

ROCHA, R. P.; SILVA, M. D. F. Uma Revisão Sistemática Abordando o Tangram, o GeoGebra e as Opções de Isometria do Plano. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v.23, n.1, p.741-768, 2021.

SILVA, M. D. F.; ROCHA, R. P. Realizando uma atividade lúdica/matemática com o uso do GeoGebra discutida à luz da Teoria da Atividade. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v.10, n.1, p.129-150, 2021.

SOUTO, D. L. P.; BORBA, M. C. Transformações expansivas em Sistemas de Atividade: o caso da produção matemática com a Internet. **Perspectivas da Educação Matemática**, v.6, p.41-57, 2013.

SOUTO, D. L. P. **Transformações Expansivas na Produção Matemática On-line**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

SOUZA, E. R. de et al. **A Matemática das sete peças do Tangram**. São Paulo, 1997.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of the computerization. In: WERSTCH, J. **The concept of activity in soviet psychology**. New York: Sharp, 1981.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.