



ARTIGO

doi <https://doi.org/10.47207/rbem.v5i1.20001>

Obstáculos epistemológicos inherentes a fração: um estudo a partir de algumas civilizações

JOSÉ, Wander Alberto

Professor efetivo da Secretaria da Educação, Juventude e Esportes (SEDUC/TO), Professor da Universidade Estadual do Tocantins (UNITINS). Doutorando em Educação pela Universidade Federal do Tocantins (UFT/PGEDA). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6604-3255>. E-mail: wanderjose@mail.uft.edu.br

CARNEIRO, Raylson dos Santos

Professor do Magistério Superior da Universidade Federal do Tocantins (UFT). Doutorando em Educação pela Universidade Federal do Tocantins (UFT/PGEDA). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4571-5822>. E-mail: raylson@mail.uft.edu.br

VIZOLLI, Idemar

Professor do Magistério Superior da Universidade Federal do Tocantins (UFT). Doutorado em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7341-7099>. E-mail: idemar@mail.uft.edu.br

Resumo: Os obstáculos epistemológicos gerados pelo conteúdo de fração se constituem num desafio ao processo de ensino e aprendizagem, especialmente porque o nascedouro se situa no campo solução de situações práticas advindas da vida social. Assim, estabelecemos como objetivo identificar obstáculos epistemológicos intrínsecos à construção histórica da fração a partir das civilizações Egípcia, Mesopotâmica, Grega e Hindu. O estudo apresenta características de abordagem qualitativa, e assenta-se na teoria dos obstáculos epistemológicos do filósofo francês Gaston Bachelard. Para tanto, conduziu-se uma pesquisa bibliográfica, a partir de cinco livros de História da Matemática que apresentam aspectos históricos da fração e, por conseguinte, obstáculos epistemológicos, o que permite uma análise da evolução e assimilação da fração nas civilizações Egípcia, Mesopotâmica, Grega e Hindu. Os resultados revelam que, independentemente do desenvolvimento da fração nas diferentes civilizações, evidencia-se a presença do obstáculo de “A Experiência Primeira”, mediante o conhecimento dos números naturais e da dificuldade em aceitar a fração enquanto número.

Palavras-chave: Obstáculos epistemológicos, fração, história da matemática, civilizações.

Epistemological Obstacles Inherent to Fractions: A Study Based on Ancient Civilizations

Abstract: The epistemological obstacles generated by the concept of fractions pose a significant challenge to the teaching and learning process, particularly since its origins lie in the practical problem-solving of social life. This study aims to identify the intrinsic epistemological obstacles in the historical construction of fractions, drawing on the Egyptian, Mesopotamian, Greek, and Hindu civilizations. This

qualitative research is grounded in the theory of epistemological obstacles proposed by the French philosopher Gaston Bachelard. A bibliographic review was conducted of five history of mathematics books that present historical aspects of fractions and, consequently, epistemological obstacles, allowing for an analysis of the evolution and assimilation of fractions in the Egyptian, Mesopotamian, Greek, and Hindu civilizations. The results reveal that, regardless of the development of fractions in different civilizations, the obstacle of "The First Experience" is evident, manifested in the knowledge of natural numbers and the difficulty in accepting fractions as numbers.

Keywords: Epistemological obstacles, fractions, history of mathematics, civilizations.

Obstáculos epistemológicos inherentes a las fracciones: un estudio a partir de algunas civilizaciones

Resumen: Los obstáculos epistemológicos generados por el concepto de fracción constituyen un desafío para el proceso de enseñanza y aprendizaje, especialmente porque su origen se encuentra en la resolución de problemas prácticos de la vida social. Este estudio tiene como objetivo identificar los obstáculos epistemológicos intrínsecos a la construcción histórica de las fracciones, a partir de las civilizaciones egipcia, mesopotámica, griega e hindú. La investigación, de carácter cualitativo, se fundamenta en la teoría de los obstáculos epistemológicos del filósofo francés Gaston Bachelard. Se realizó una revisión bibliográfica de cinco libros de Historia de la Matemática que presentan aspectos históricos de las fracciones y, por consiguiente, obstáculos epistemológicos, lo que permite un análisis de la evolución y asimilación de las fracciones en las civilizaciones egipcia, mesopotámica, griega e hindú. Los resultados revelan que, independientemente del desarrollo de las fracciones en las diferentes civilizaciones, se evidencia la presencia del obstáculo de "La Primera Experiencia", mediante el conocimiento de los números naturales y la dificultad en aceptar la fracción como número.

Palabras clave: Obstáculos epistemológicos, fracciones, historia de las matemáticas, civilizaciones.

A problemática da pesquisa

Compreende-se que ser docente de matemática não é tarefa simples, dada a vastidão do seu arcabouço teórico e a complexidade dos conteúdos desenvolvidos ao longo dos séculos. O processo de ensino de matemática exige habilidades didático-pedagógicas, mas também uma concepção epistemológica de produção do conhecimento dos objetos matemáticos a serem ensinados, o que nem sempre é contemplado nos cursos de formação inicial.

Martins (2016), desenvolveu uma pesquisa com sessenta e dois professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, na qual constatou que o ensino dos números racionais, tanto em sua representação fracionária quanto decimal, é percebido como

particularmente desafiador. Um dos fatores que levam a esses resultados é a leitura de um número fracionário, que requer uma interpretação vinculada a um processo de partição, o que torna o conceito de fração mais complexo quando comparado aos números naturais, que estão associados a processos simples de medição e de contagem. Desta forma, o estudo de frações é considerado uma atividade cognitivamente desafiadora, sujeita à manifestação de obstáculos epistemológicos.

O filósofo e epistemólogo francês Gaston Bachelard (1884 - 1962), vivenciou uma época de grandes transformações no campo científico, como a teoria da relatividade de Einstein e as discussões da mecânica quântica. Neste cenário, ele propôs uma nova epistemologia para as ciências, conhecida como epistemologia bachelardiana.

Trata-se de uma filosofia das ciências que, em matéria de teoria do conhecimento, não propõe mais soluções filosóficas para problemas científicos já superados. Trata-se de uma filosofia aberta, que não encontra mais em si mesma as ‘verdades primeiras’, nem tampouco vê na identidade do espírito a certeza que garante um método permanente e definitivo. O que deve ser abandonado é uma filosofia que coloca seus princípios como intangíveis e que afirma suas verdades primeiras como totais e acabadas (Japiassú, 1992, p. 73-74).

Antes de se tornar um filósofo e epistemólogo, Bachelard lecionou física e química. A partir de sua experiência como educador, percebeu a existência de obstáculos pedagógicos no campo da educação.

A epistemologia bachelardiana define, portanto, o progresso do conhecimento científico como uma retificação contínua e chama a atenção do epistemólogo e do educador para o seu axioma primeiro a “*primazia teórica do erro*”. [...] Ao contrário da pedagogia tradicional que durante muito tempo, e ainda hoje, concebe o erro como um acidente de percurso, uma imperícia, um defeito, a ignorância de um saber, Bachelard defende, insistentemente, talvez como ninguém, que o erro tem uma função positiva na gênese do conhecimento, que o erro não é uma simples privação ou carência, mas que ele tem a estrutura e a vitalidade do instinto (Trindade, 1996, p. 77, grifo do autor).

Este artigo é parte integrante da dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação de Mestrado Acadêmico em Educação pela Universidade Federal do Tocantins (UFT), a qual teve como objetivo “conhecer os obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração”. Os resultados indicam que o conhecimento dos números naturais se constituiu como obstáculo epistemológico, uma vez que a “leitura e interpretação simples associada aos processos de contagem ou de medição faz com que este conhecimento seja um obstáculo ao estabelecimento

do número fracionário, oriundo de uma ideia complexa a de ‘partição de algo’, em que sua leitura envolve uma interpretação” (José, 2021, p. 8).

O presente artigo tem como objetivo identificar obstáculos epistemológicos intrínsecos à construção histórica de fração a partir das civilizações Egípcia, Mesopotâmica, Grega e Hindu. Objetivo este que demanda buscar na história de diferentes civilizações elementos que permitam averiguar quais os obstáculos epistemológicos permearam a elaboração do conhecimento da fração.

Aspectos metodológicos

Trata-se de uma pesquisa de cunho bibliográfico, com abordagem qualitativa e apoia-se na teoria dos obstáculos epistemológicos de Gaston Bachelard. Ao se vislumbrar o arcabouço teórico dos obstáculos epistemológicos, a pesquisa qualitativa destaca-se como uma ferramenta essencial para investigar fenômenos sociais em suas relações com as pessoas e os objetos de conhecimento. É importante ressaltar que na abordagem qualitativa comporta uma dinâmica entre o sujeito e o objeto da pesquisa, demandando do pesquisador uma postura reflexiva e uma constante revisão de seus conceitos prévios, sob o risco de interferência indevida nos resultados verificados (Severino, 2016).

A pesquisa bibliográfica, por sua vez, fundamenta-se na análise de registros disponíveis em documentos impressos, como livros, artigos e teses, que representam fontes valiosas de conhecimento acumulado. De acordo com Severino (2016), esse tipo de pesquisa pressupõe explorar e analisar as contribuições culturais ou científicas do passado em relação a determinado assunto, tema ou problema.

Para este estudo, foram selecionados cinco livros que versam sobre a história das frações em diferentes civilizações (Quadro 1), que constituem a base principal de investigação sobre a origem e o desenvolvimento do conceito de fração. A fim de complementar os estudos, também foram utilizados outros trabalhos (artigos científicos, monografias e dissertações), as quais abordam História da Matemática, especificamente relacionadas ao surgimento das frações.

Quadro 1: Livros de História da Matemática utilizados na pesquisa

Título da obra	Autor	Editora	Ano
História da Matemática.	Carl Benjamin Boyer	Edgard Blücher Ltda	1994
História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo	Georges Ifrah	Nova Fronteira	1997
Introdução à História da Matemática.	Howard Eves	Editores da Unicamp	2011
História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas	Tatiana Roque	Jorge Zahar	2012
Introdução à História da Matemática.	Rogério Santos Mol	CAED-UFMG	2013

Fonte: Dados da pesquisa

A escolha dessas obras baseou-se na forma mais sistemática com que elas abordam os processos pelos quais as civilizações realizaram seus registros, sobretudo a maneira como representaram os números. Ademais, elas apresentam relevância ao fornecer informações acerca dos aspectos históricos da fração, assim como os obstáculos epistemológicos inerentes ao seu conceito. Conquanto, esse material bibliográfico contribui sobremaneira para a identificação de elementos relacionados ao contexto histórico, localização, necessidade de uso, aspectos da escrita, o sistema de numeração e os desafios enfrentados pelas civilizações Egípcia, Mesopotâmica, Grega e a Hindu em relação à compreensão da fração. Essa análise detalhada permite um entendimento mais profundo dos obstáculos epistemológicos envolvidos na conceituação da fração ao longo da história.

Base conceitual da pesquisa

A compreensão dos conceitos matemáticos é parte essencial da formação de professores que ensinam Matemáticas cuja ação docente, além de complexa, requer planejamento, conhecimentos acerca do conteúdo a ser ministrado, propor situações didático-pedagógicas interessantes desafiados, entre outros.

Para nós [pedagogos, pesquisadores e teóricos da educação], é claro que não se pode ser professor sem combinar três tipos de conhecimento: **saber muito bem o conteúdo que se vai ensinar** – isso é central, se não se souber muito bem história, não se pode ensinar história; se não se souber muito bem matemática, não se pode ensinar matemática; ter as bases centrais de tudo o que é da pedagogia, das teorias da

aprendizagem, sobre a maneira como as crianças aprendem; e depois, ter um conhecimento da profissão, saber como a profissão funciona na prática, qual é o conhecimento profissional, como se organizar nas escolas, como qualificar o trabalho. Sem esses tipos de conhecimento, é impossível ser professor (Nóvoa, 2016, s/p, grifo nosso).

O processo de ensino de Matemática abrange diversos aspectos, como leituras, abstrações, experiências didáticas e a compreensão da História da Matemática. Segundo Martins (2016), é notável que tanto alunos quanto professores enfrentam dificuldades semelhantes em relação a certos conceitos matemáticos, quando considerados os obstáculos epistemológicos e didáticos, refletindo na assimilação do conhecimento. Por exemplo, se um professor não superou obstáculos epistemológicos ou didáticos durante sua própria formação, é provável que esses obstáculos influenciem negativamente seu ensino, perpetuando uma compreensão inadequada dos conceitos matemáticos.

É preciso valorizar as questões acerca de conhecimento, e como ele é construído. “Ao valorizarmos a dimensão epistemológica é nossa intenção destacar alguns aspectos que precisam estar presentes, quer na formação dos professores, quer na sua prática docente” (Trindade, 1996, p. 11). Compreende-se que conhecer a teoria dos obstáculos epistemológicos favorece o docente no processo de ensino e em sua epistemologia.

Entendemos a *epistemologia do professor* como sendo as concepções referentes à disciplina com que trabalha esse professor, oriundas do plano estrito de sua compreensão e que conduzem uma parte essencial de sua postura pedagógica, em relação ao entendimento dos conceitos ensinados aos alunos. (Pais, 2018, p. 34, grifo do autor).

Assim, a epistemologia bachelardiana notabilizou-se pelo avanço da discussão acerca do processo de construção do conhecimento científico. Conforme Bachelard (2005), é impossível impedir o surgimento de obstáculos epistemológicos, vez que estes estão intimamente ligados ao processo de construção do conhecimento.

O conceito de obstáculos epistemológicos foi proposto por Bachelard em 1938 em sua obra denominada de “A Formação do Espírito Científico – Contribuição para uma Psicanálise do Conhecimento”, organizando-os nas seguintes categorias: A Experiência Primeira; Conhecimento Geral; Obstáculo Verbal; Conhecimento Unitário e Pragmático; Obstáculo Substancialista; Obstáculo Realista; Obstáculo Animista; O Mito da Digestão; Libido e Conhecimento Objetivo; e Obstáculos do Conhecimento Quantitativo.

Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que *é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado*. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (Bachelard, 2005, p. 17, grifo do autor).

Os obstáculos epistemológicos não seguem uma hierarquia, e à medida que o conhecimento científico avança, alguns destes obstáculos vão sendo superados. E conforme Bachelard (2005), é desejável que os docentes conheçam a teoria dos obstáculos epistemológicos e que assim possam buscar a superação destes em sua formação pedagógica.

Fração: origens e obstáculos

A história da fração é um tema controverso com divergências entre localidades, datas ou períodos. Credita-se o surgimento da fração às atividades humanas, a partir da necessidade dos indivíduos em contextos que envolviam medição,

[...] pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis (Eves, 2011, p. 57).

Ressalta-se que o desenvolvimento histórico do conceito de fração, das primeiras ideias até a maneira de representação que se conhece levou milhares de anos. De acordo Boyer (1994), a noção de fração racional surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada com os sistemas para os inteiros. Os primeiros povos, ao que tudo indica, pouco utilizavam fração, dado que em seu cotidiano as atividades não demandavam tais conhecimentos.

Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas, o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto, não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para

decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da Matemática, não do período primitivo (Boyer, 1994, p. 4).

A evolução do conceito de fração ocorreu em diferentes civilizações, porém com uma característica comum, a necessidade de medir e operar com quantidades não inteiras, como áreas e volumes. “A própria palavra ‘fração’ tem como raiz palavras como ‘fratura’ e ‘fragmento’. Ao mesmo tempo, novos sistemas de pesos e medidas foram surgindo de acordo com tal necessidade, ou seja, unidades básicas de medida menores para maior precisão” (Costa, 2010, p. 9).

Não se tem dados para fixar o período da história primitiva em que foram descobertos os números cardinais, embora os mais antigos documentos escritos encontrados, mostrem a presença desse conceito na China, Índia, Mesopotâmia e Egito, juntamente com as primeiras notações de frações. [...] A maioria dos textos egípcios antigos contendo números são textos de economia, que mostram listas de ração, de trabalho, inventários, saídas e recebimentos, nos quais aparecem método de cálculo envolvendo a ideia de fração, apesar de seu uso inexplorado (Silva, 1997, p. 12).

De acordo Boyer (1994), a representação do sistema fracionário foi desenvolvida de maneiras diferentes, por várias civilizações, cada uma em seu contexto histórico e foram influenciadas por seus sistemas de numeração e de escrita. Entre essas civilizações estão a Egípcia, a Mesopotâmica, a Grega e a Hindu, nas quais as próximas seções apresentam o surgimento e desenvolvimento do conceito de fração em cada uma delas.

As frações Egípcias

Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para as frações unitárias – isto é, com numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado (Boyer, 1994, p. 9-10).

As frações egípcias remetem a um período entre 3000 a 4000 anos antes de cristo (a. C.). Segundo o historiador Heródoto, o faraó Sesóstris, adotava procedimentos em que se vislumbra o uso de fração.

Esse rei realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos um certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o

acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante (Almeida; Corrêa, 1997, p. 1).

Nesse processo de medição, os servos do faraó utilizavam cordas que possuíam uma unidade de medida. A técnica consistia em verificar quantas vezes a corda cabia nas laterais do terreno, porém nem sempre o resultado encontrado correspondia a um número inteiro. “Desta forma, a resposta encontrada pelos egípcios foi criar um novo tipo de número com a intenção de dividir o todo em partes, surgindo assim os números fracionários” (Filho, 2017a, p. 81).

Pressupõe-se que grande parte do conhecimento matemático da antiguidade tenha sido perdido em função da fragilidade dos registros, geralmente feitos em papiros, pedras, blocos ou tábuas de argila, dentre os registros que sobreviveram ao tempo, um deles é o famoso Papiro de Rhind, ilustrado pela Figura 1.

Figura 1: Fragmento da imagem do papiro Rhind

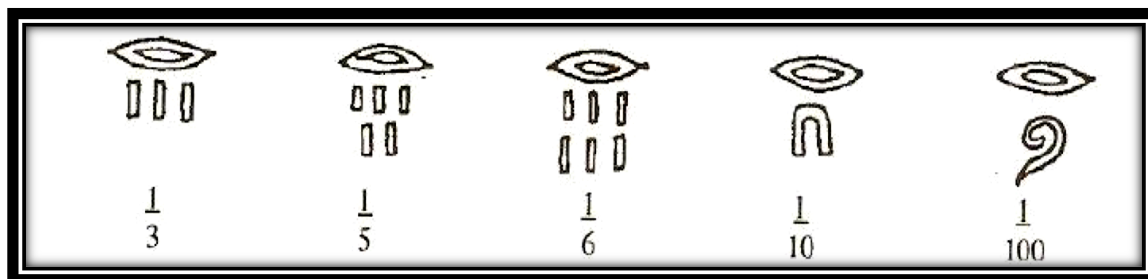


Fonte: Mol (2013, p. 22)

O papiro Rhind constitui-se numa fonte rica em relação a Matemática egípcia antiga, e traz algumas aplicações, dentre estas o uso da fração unitária (Eves, 2011). “Para exprimir as frações de número, os egípcios serviam-se, de modo geral, do hieróglifo da boca” (Ifrah, 1997, p. 348).

As frações unitárias eram expressas na notação hieroglífica e utilizavam um sinal elíptico ‘boca’, seguido do número que indicava as partes, conforme ilustrado pela Figura 2.

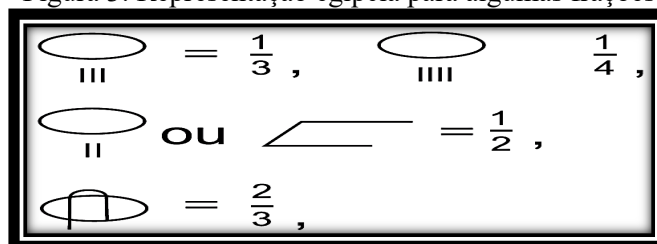
Figura 2: Hieróglifos egípcios utilizados para representar frações unitárias



Fonte: Ifrah (1997, p. 349)

Tal representação equivale ao conceito de frações unitárias da forma $\frac{1}{n}$, representando a ideia do todo e das partes. Eram exceções o $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3: Representação egípcia para algumas frações



Fonte: Eves (2011, p. 73)

Com base no papiro de Rhind, os egípcios sabiam operar somente com as frações unitárias, para outros tipos de frações, eles realizavam a decomposição delas em frações unitárias distintas. Contudo, deve-se ter cuidado ao utilizar o termo fração ‘unitária’, diferente da maneira que se representa a fração atualmente, o símbolo oval, acima do número, não representa o que chamamos de ‘numerador’ (Almeida; Corrêa, 1997).

As frações egípcias não tinham numerador. Nosso numerador indica quantas partes estamos tomando de uma subdivisão em um dado número de partes. Na designação egípcia, o símbolo oval não possui um sentido cardinal, mas ordinal. Ou seja, indica que, em uma distribuição em n partes iguais, tomamos a n -ésima parte, aquela que conclui a subdivisão em n partes. É como se estivéssemos distribuindo algo por n pessoas e $1/n$ é quanto cada uma irá ganhar. Logo, configura-se um certo abuso de linguagem dizer que, na representação egípcia, as frações possuem “numerador 1”. Seria mais adequado dizer que essas frações egípcias representam os inversos dos números (Roque, 2012, p. 58).

Notadamente as frações egípcias desempenharam um aspecto relevante no processo de construção do conceito de fração. Paralelamente outros povos tiveram suas contribuições na elaboração de tal conceito.

A fração na Mesopotâmia

As civilizações antigas da Mesopotâmia são frequentemente chamadas de Babilônias. Mesmo sendo uma informação parcialmente correta, esta não é a melhor designação. A palavra Mesopotâmia em grego quer dizer ‘entre rios’ (Boyer, 1994).

Entre os rios Tigre e Eufrates, destacavam-se várias cidades que se constituíam em pequenos centros de poder, mas também passavam por ali povos nômades, que, devido à proximidade dos rios, acabavam por se estabelecer. Dentre os que habitaram a Mesopotâmia estão os sumérios e os acadianos, hegemônicos até o segundo milênio antes da Era Comum. As primeiras evidências de escrita são do período sumério, por volta do quarto milênio a.C. Em seguida, a região foi dominada por um império cujo centro administrativo era a cidade da Babilônia, habitada pelos semitas, que criaram o Primeiro Império Babilônico (Roque, 2012, p. 25).

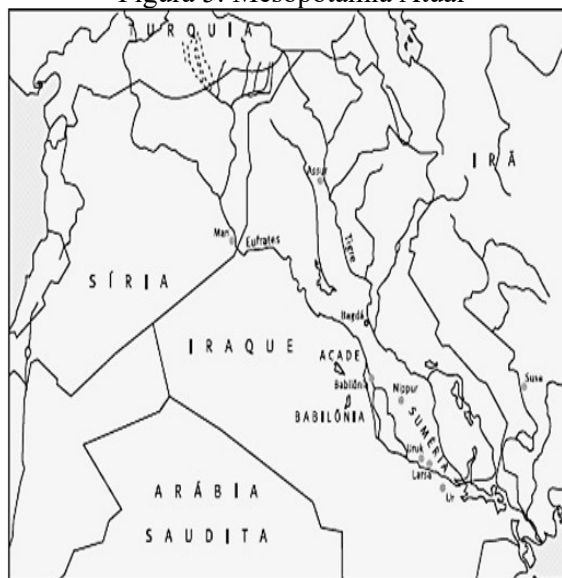
As margens dos grandes rios, tanto no Egito quanto na Mesopotâmia, possibilitavam condições favoráveis ao desenvolvimento de civilizações, o acesso a água e terras férteis favoreciam a agricultura. A região que correspondente à antiga Mesopotâmia hoje equivale aproximadamente às áreas ocupadas pelo Iraque e partes da Síria, Turquia e Irã, conforme ilustrado pelas Figuras 4 e 5.

Figura 4: Mesopotâmia Antiga



Fonte: Eves (2011, p. 59)

Figura 5: Mesopotâmia Atual



Fonte: Roque (2012, p. 26)

Diferente dos egípcios que faziam seus registros principalmente em papiros, os mesopotâmicos faziam maior uso de tábulas de argila, que apresentavam maior resistência. Conforme Boyer (1994), as tábulas de argila úmidas eram inscritas com o uso de objetos em forma de cunha (cuneiformes) e, em seguida, eram cozidas ao sol ou em fornos, o que as tornavam menos vulneráveis aos estragos provocados pela manipulação ou mesmo ao desgaste ocasionado pelo tempo.

A civilização Mesopotâmica escrevia fração utilizando a base de numeração sexagesimal, ao que denominamos base 60. “[...] e, ao contrário dos egípcios, usavam a mesma notação tanto para números inteiros quanto para os fracionários, bastante análogo a representação atual” (Filho, 2017b, p. 24). Tal característica favorecia a representação de números grandes. Na Figura 6 tem-se um exemplo do sistema Mesopotâmico.

Isso se tornou possível pela invenção que fizeram, há cerca de 4000 anos, da notação posicional – o mesmo princípio que assegura a eficácia de nossa forma numeral, isto é, os antigos babilônios viram que seus símbolos podiam ter função dupla, tripla, quádrupla ou em qualquer grau, simplesmente recebendo valores que dependessem de suas posições relativas na representação de um número (Boyer, 1994, p. 20).

Figura 6: Exemplo de utilização do sistema de numeração sexagesimal

Nos exemplos abaixo, o símbolo Υ representa a unidade na base 60, enquanto o símbolo \llcorner representa o número 10:	
$\llcorner \llcorner \Upsilon \Upsilon \Upsilon$	$23 = 20 + 3$
$\Upsilon \llcorner \llcorner \Upsilon \Upsilon \Upsilon$	$83 = 60 + 23$
$\llcorner \llcorner \Upsilon \Upsilon \llcorner \llcorner \Upsilon \Upsilon \Upsilon$	$1343 = 2 \times 10 \times 60 + 2 \times 60 + 23$
$\Upsilon \Upsilon \Upsilon \llcorner \llcorner \Upsilon \Upsilon \Upsilon$	$3743 = 60 \times 60 + 2 \times 60 + 23$

Fonte: Mol (2013, p. 18)

Os babilônios empregavam o princípio posicional, e os números menores que 60 eram representados por um sistema de base 10, já os números iguais ou maiores que 60 eram designados pelo mesmo princípio com a base 60 (Silva, 1997). “Este tipo de base babilônica tem influência ainda nos dias atuais quando tratamos de medida de tempo, por exemplo, horas e suas subdivisões como minutos e segundos” (Romeiro, 2017, p. 59).

O segredo da clara superioridade da matemática babilônica sobre a dos egípcios indubitavelmente está em que os que viviam “entre os dois rios” deram o passo muito feliz de estender o princípio das posições às frações. Isto é, a notação $\Upsilon \Upsilon \Upsilon \Upsilon$ era

usada não só para $2(60) + 2$, mas também para $2 + 2(60)^{-1}$ ou para $2(60)^{-1} + 2(60)^{-2}$ e outras tais frações. Isso significava que os babilônios dominavam o poder de computação que a moderna notação decimal para frações nos confere (Boyer, 1994, p. 20).

Diferente dos egípcios, os babilônios não possuíam uma simbologia própria para retratar a fração, assim o contexto exercia grande influência na interpretação dos escritos. “Os babilônios por sua vez representavam suas frações na forma $\frac{n}{60}$ e $\frac{n}{3600}$ ” (Filho, 2017b, p. 24). Existia um inconveniente no uso das frações mesopotâmicas, não havia um símbolo para indicar onde a parte fracionária começava, o que poderia levar a interpretações errôneas na leitura de um número com parte inteira e parte fracionária (Romeiro, 2017).

A fração na Grécia antiga

Na Grécia Antiga, foram utilizados alguns sistemas de numeração. Um dos primeiros, o sistema ático ou herodiano, constituía-se num sistema de agrupamentos de base 9, formado pelas letras iniciais dos nomes dos números, conforme apresentado na Figura 7 (Eves, 2011).

Figura 7: Sistema de Numeração Ático

I = 1	iota	H = 100	hekaton
Γ = 5	penta	X = 1000	khiloi
Δ = 10	deka	M = 10000	murioi

Fonte: Mol (2013, p. 30)

Com o passar do tempo, o sistema de numeração ático foi substituído por outro no qual os números eram representados pelas letras que compunham o alfabeto grego.

Figura 8: Sistema de Numeração Alfabético

Unidades			Dezenas			Centenas		
α	alfa	1	ι	iota	10	ρ	rô	100
β	beta	2	κ	capa	20	σ	sigma	200
γ	gama	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mi	40	υ	ípsilon	400
ϵ	épsilon	5	ν	ni	50	ϕ	fi	500
ς	stigma	6	ξ	csi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	\omicron	ômicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
θ	teta	9	ϱ	qoppa	90	ϖ	sampi	900

Fonte: Mol (2013, p. 31)

Na Figura 8, pode-se observar as letras do alfabeto grego e os respectivos valores no sistema indo-arábico. Esse sistema de numeração grego ficou conhecido como jônico ou alfabético e era formado por 27 caracteres (Eves, 2011).

O sistema alfabético não era posicional, e não se mostrou eficiente para a escrita de frações. A Figura 9 ilustra a representação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{43}$ no sistema alfabético grego.

Figura 9: Representação de frações no Sistema Alfabético

$$\gamma' = \frac{1}{3} \quad \mu\gamma' = \frac{1}{43} \text{ ou } 40\frac{1}{3}$$

Fonte: Mol (2013, p. 31)

As frações unitárias podiam ser indicadas marcando o denominador com um acento. Na Figura 9, verifica-se uma ambiguidade proveniente da notação utilizada, sobretudo na expressão $\mu\gamma' = \frac{1}{43}$ ou $40\frac{1}{3}$. Tais situações acabavam ficando a cargo da interpretação dada a partir do contexto envolvendo a elaboração da fração (Mol, 2013).

A fração Hindu antiga

Devido à falta de registros históricos autênticos, pouco se sabe em relação ao desenvolvimento da Matemática hindu antiga (Eves, 2011). “Escavações arqueológicas em Mohenjo Daro fornecem provas de uma civilização antiga e de alta cultura na Índia durante a era das construções de pirâmides egípcias, mas não temos documentos matemáticos indianos dessa época” (Boyer, 1994, p. 150).

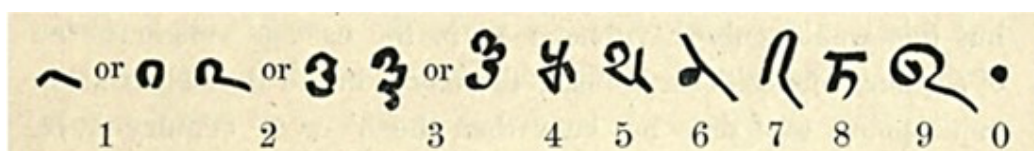
Foi há cerca de 4000 anos que bandos de nômades, vindos das planícies da Ásia central, atravessaram o Himalaia e penetraram na Índia. Esses invasores chamavam-se *arianos*, designação que provém da palavra sânscrita que significa ‘nobre’ ou ‘proprietário de terras’. Muitos desses invasores permaneceram; outros rumaram para a Europa e formaram a raiz da raça indo-europeia. A influência dos arianos gradualmente estendeu-se por toda a Índia. Durante o primeiro milênio de sua permanência eles aprimoraram a língua sânscrita, escrita e falada. São eles também os responsáveis pelo sistema de castas (Eves, 2011, p. 247, grifo do autor).

A Índia sofreu inúmeras invasões, tais movimentos tiveram influência em aspectos culturais, econômicos e sociais em maior ou menor grau, ao longo dos séculos.

De por volta de 450 d.C. até perto do fim do século XV a Índia outra vez se viu às voltas com numerosas invasões estrangeiras. Primeiro vieram os hunos, depois, no século VIII, os árabes e no século XI os persas. Durante esse período despontaram vários matemáticos hindus eminentes, destacando-se os dois Āryabhatas, Brahmagupta, Mahāvīra e Bhāskara. O mais velho dos Āryabhatas, que se sobressaiu no século VI, nasceu perto da atual Patna, junto ao Ganges (Eves, 2011, p. 250).

No entanto, atribui-se importantes feitos na Matemática aos antigos Hindus, dentre as contribuições destaca-se seu sistema de numeração, decimal e posicional. Na Figura 10, tem-se uma representação dos numerais a partir do manuscrito Bakhshali.

Figura 10: Números hindus antigos



Fonte: Algarismos arábicos

Conjectura-se que tais escritos representem conhecimentos relativos aos primeiros séculos da nossa era, algo entre o século II a. C. e o século III d. C.

Tanto a Índia como o Egito possuíam seus estiradores de corda, e os primeiros registros da Matemática indiana constam em livros religiosos intitulados Sulvasutras ou ‘regras de corda’, que datam do século II d.C. Estes livros continham primitivas noções geométricas adquiridas nos trabalhos de construção de templos e altares (Boyer, 1994).

O sistema de numeração hindu foi resultado da incorporação de elementos de outros povos e de uma longa evolução interna. Os hindus uniram em seu sistema quatro elementos: a base decimal, a notação posicional, o uso do zero e uma notação para cada um dos dez numerais. Nenhum desses elementos foi criação hindu, mas foi na Índia que eles ganharam uma existência conjunta. A princípio, o sistema contava apenas com nove símbolos básicos. O zero, como instrumento para preencher posições vazias, surgiu apenas posteriormente – a primeira referência a ele data do século IX (Mol, 2013, p. 63, grifo nosso).

Mesmo não havendo registros formais, há evidências de que a Matemática dos Hindus sofreu influências Grega, Chinesa, Babilônica e vice-versa. Outra constatação é que os matemáticos Hindus apresentavam especial interesse pela astronomia. Ademais, é difícil focalizar os Hindus, e uma das principais dificuldades está relacionada aos escritos quase incompreensíveis de seus escritores (Eves, 2011).

Obstáculos epistemológicos intrínsecos à formação do conceito de fração

A partir da noção de fração em diferentes civilizações é possível detectar alguns obstáculos inerentes ao desenvolvimento desse conceito, uma vez que, cada povo em sua época e com base em suas necessidades, desenvolveu e representou a fração. No Quadro 2, tem-se alguns obstáculos epistemológicos conforme estudo da fração realizado por Silva (1997).

Quadro 2: Obstáculos Epistemológicos no conceito de fração

Obstáculo Epistemológico	Considerações
Representação Simbólica	A representação usada hoje foi conquistada depois de séculos e a partir das representações individuais de cada povo. Chegar a uma única representação, que não fosse ambígua, não foi uma conquista simples. Os egípcios se firmaram nas frações unitárias, colocando um ponto sobre o símbolo do denominador; os babilônios, mesmo com um sistema de escrita numérico e posicional, não conseguiram resolver a ambiguidade desse sistema; os gregos por sua vez, com seu sistema alfabético tinham dificuldades até de operar com as frações representadas dessa forma.
Negação da necessidade das quantidades fracionárias	Uma das situações que levou o homem a sentir necessidade dos números fracionários foi a questão da medida. No entanto, percebe-se que ele lutou muito contra isso através da procura incessante de unidades de medida que permitissem medir qualquer coisa e obter como resultado um número inteiro em vez dessa unidade, pois o conhecimento dos números naturais através da contagem o induzia a essa procura.
Dificuldade em aceitar as frações como número	Uma das grandes dificuldades dos matemáticos foi aceitar a fração como sendo um número. Euler, já no século XVII, era um deles e por isso apresentava duas vezes as mesmas propriedades numéricas, uma vez para os 'números' (naturais) e outra para as 'frações'. Mesmo após Stevin ter dado o status de número às frações, ainda permaneceu uma certa resistência, que só foi se dissipar após a revolução francesa. Essa grande dificuldade é essencialmente devido ao fato de o número fracionário ser de natureza diferente da dos números naturais. Ele não surge simplesmente de um processo de contagem, mas sim de um ato de partição de 'algo' que se toma como um inteiro, o que leva as crianças a interpretarem as frações como um par de números naturais e não como um único número que também representa uma quantidade.
Conhecimento dos Naturais	O conhecimento dos números naturais constitui em si mesmo um obstáculo ao aprendizado dos números fracionários. A maioria

	<p>das crianças passa pelo mesmo processo dos matemáticos da história, pois também para elas só os números naturais têm o status de número. Como todo o seu conhecimento numérico está relacionado ao conjunto dos naturais, as crianças ao iniciarem o trabalho com frações tentam aplicar os conhecimentos que já possuem, tratando as frações como dois números naturais, que estão escritos um em cima do outro.</p> <p>À medida que o estudo se aprofunda permanece a dificuldade em aceitar situações em que o dividendo seja menor que o divisor, sendo comum, o aluno alegar que não dá para dividir 2 por 5 depois de ter recebido muita instrução sobre frações, sem nenhuma relação como conhecimento anterior que aconteceu naturalmente.</p>
<p>O modelo de Referência</p>	<p>O aluno, quando começa a trabalhar com as frações, tem como modelo de referência o conjunto dos números naturais que é um modelo discreto; no entanto, as frações são introduzidas a partir do modelo contínuo com a concepção parte/todo, com a intenção de apresentar ao aluno um novo conjunto numérico, em que poderá resolver algumas situações, que o antigo não resolvia. Na história, a origem das frações se deu no modelo parte/todo no contínuo (divisão de terras) sendo por isso o modelo preferido pelo ensino. No entanto, o aluno é levado a contar as partes, num movimento de ‘discretização’ da área envolvida em pedaços contáveis, fazendo com que volte ao modelo original e perca o sentido do inteiro inicialmente considerado. Além disso, esse processo pode provocar a concepção de que ‘fração’ é o número de partes da unidade.</p>

Fonte: Silva (1997)

A partir do Quadro 2, tem-se que a construção do conceito de fração relaciona-se com o processo de evolução das civilizações, sua linguagem, sua escrita e o conhecimento disponível acerca da Matemática. Com base na psicanálise do conhecimento feita por Bachelard (2005), pode-se considerar o período que compreende às origens da fração em diferentes civilizações como pertencente ao estado pré-científico¹.

A partir de uma análise numa perspectiva bachelardiana, pode-se corresponder os obstáculos epistemológicos propostos por Silva (1997), constantes no Quadro 2, com o obstáculo de “A Experiência Primeira”. Tal análise é exposta no Quadro 3.

As experiências primeiras impressionam os sentidos, pois baseiam-se em fatos conhecidos e podem induzir uma falsa segurança, desta maneira possibilitam interpretações distorcidas e a rejeição de novos conhecimentos, Costa (2012). O obstáculo de “[...] A

¹ Conforme Bachelard (2005) corresponde a todo o período que antecede o século XVIII, compreendendo a Antiguidade Clássica e os séculos do renascimento.

Experiência Primeira privilegia a imagem em detrimento da ideia, assim, o primeiro conhecimento constitui-se em um primeiro erro (Bôas; Filho, 2018, p. 44).

Quadro 3: Análise de obstáculos epistemológicos

Obstáculo Epistemológico segundo Bachelard (2005)	Obstáculo Epistemológico segundo Silva (1997)	Considerações
A Experiência Primeira	Representação Simbólica	O conceito de fração foi elaborado simultaneamente ou não, por diferentes civilizações antigas. Cada uma buscou desenvolver uma representação própria, a partir de seu conhecimento dos números, da escrita que possuíam, seus símbolos e recursos.
	Negação da necessidade das quantidades fracionárias	A negação da necessidade de quantidades fracionárias, advém do ato de conhecer e operar com as quantidades inteiras. O processo de medição ficava confuso, ao procurar maneiras de usá-lo para atender simultaneamente partes inteiras e fracionárias.
	Dificuldade em aceitar as frações como número	Os números Naturais (e os inteiros) apresentam-se sempre prontos, sua forma de representação e de leitura são bastante simples, quando comparados à forma fracionária, que precisa ser interpretada. Num primeiro momento, o indivíduo tende a rejeitar a fração como número, pois não compreende sua natureza que está ligada a um processo de partição, enquanto os Naturais se vinculam a uma ideia conhecida, a do processo de contagem.
	Conhecimento dos Naturais	O indivíduo que conhece o conjunto dos Naturais, tende a utilizar este conhecimento quando confrontado com a fração, e neste novo cenário as relações e operações baseadas nos Naturais não conseguem atender ao novo contexto.
	O modelo de Referência	O conjunto dos números Naturais é um modelo discreto, é o primeiro que o indivíduo aprende e opera. Ao se introduzir a fração, parte-se da concepção parte-todo e utiliza-se a princípio exemplos que envolvem modelos contínuos: divisão de terras, pizzas, barras de chocolate.

Fonte: dados da pesquisa

Considerando-se o obstáculo de A Experiência Primeira, entende-se que toda ação docente necessita de planejamento e atenção constantes, pois mesmo munido de boas intenções a prática do docente pode induzir a manifestação desse obstáculo na aprendizagem do estudante.

Entende-se que é possível superar alguns obstáculos sozinho, no entanto, há situações em que essa superação não é imediata. Os conceitos já estabelecidos contradizem o novo conceito, interrompendo seu processo de apropriação. Nessas situações, a mediação do professor se faz necessária. Quando o professor não está preparado para fazer essa mediação, pode haver ruptura no processo de aprendizagem. Aliás, pode ainda levar ao surgimento de outros obstáculos que irão interferir em futuras aprendizagens (Martins, 2016, p.72).

Portanto, conforme Bachelard (2005), é desejável que os docentes conheçam a teoria dos obstáculos epistemológicos e que assim possam buscar a superação destes em sua formação pedagógica, e conseqüentemente, na sua prática pedagógica.

CONSIDERAÇÕES

Ao investigar os obstáculos epistemológicos intrínsecos à construção histórica do conceito de fração em diversas civilizações, buscou-se dados e informações a partir de obras que abordam a História da Matemática em civilizações, verificou-se que as ‘primeiras ideias de fração’ ocorreram devido às necessidades de cada povo em resolver problemas do seu cotidiano e na constituição dos seus sistemas de numeração e de escrita.

Ressalta-se que a construção do conceito de fração levou milênios, e não foi realizada por uma única civilização, ela ocorreu simultaneamente em diversas partes do mundo e esse fato muitas vezes não é referenciado nos livros didáticos. E a forma ‘tradicional’ como representamos uma fração com o uso de uma barra para separar o numerador e o denominador, ocorreu apenas no século XII, com mais ênfase a partir do século XVI.

O uso da barra para separar os números foi introduzido pelos árabes em algum momento do século XII e desde então apareceu na grande maioria dos escritos em latim, sendo omitido no surgimento da imprensa no final do século XV e início do século XVI por dificuldades de impressão e reaparecendo algumas décadas depois (Filho, 2017b, p. 25).

Ao analisarmos os obstáculos epistemológicos intrínsecos à construção histórica do conceito de fração, revela-se importantes entendimentos a respeito dos desafios enfrentados no

ensino e na compreensão desse conteúdo matemático fundamental. Destacando-se as dificuldades persistentes relacionadas ao obstáculo de A Experiência Primeira, que se manifestam na transição do conhecimento dos números naturais para o entendimento das frações. Essas dificuldades persistem até os dias atuais, envolvendo questões como: a interpretação das representações simbólicas; a concepção de quantidades menores que a unidade; a aceitação da fração como um número; e a influência do modelo de referência dos números naturais, que é discreto, sobre a compreensão das frações.

Os resultados obtidos sugerem que a presença desses obstáculos epistemológicos transcende as fronteiras temporais e geográficas, influenciando o modo como a fração é concebida e ensinada em diferentes contextos históricos e culturais. Essa constatação ressalta a complexidade inerente ao processo de aprendizagem da Matemática e destaca a importância de abordagens pedagógicas que levem em consideração não apenas a estrutura formal dos conceitos matemáticos, mas também os obstáculos cognitivos e epistemológicos enfrentados pelos alunos.

Portanto, é fundamental que os educadores estejam cientes desses obstáculos e busquem estratégias pedagógicas que ajudem os alunos a superá-los, promovendo uma compreensão mais sólida e significativa do conceito de fração. Além disso, a investigação desses obstáculos epistemológicos pode contribuir para o desenvolvimento de abordagens de ensino mais eficazes e para a construção de um corpo de conhecimento pedagógico mais formativo e reflexivo no campo da Educação Matemática.

Referências

ALGARISMOS ARÁBICOS. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Algarismos_ar%C3%A1bicos&oldid=65776864. Acesso em: 29 jan. 2023.

ALMEIDA, Arthur Costa; CORRÊA, Francisco J. S. de Araújo. Papiro de Rhind e as frações unitárias. **Revista do Professor de Matemática**, n. 35. p. 2-8. 1997.



- BACHELARD, Gaston. **A Formação do Espírito Científico**: contribuição para uma psicanálise do Conhecimento. Tradução Estela dos Santos Abreu. 5ª reimpressão. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.
- BÔAS, Claudia S. do N. Vilas; FILHO, Moacir P. de Souza. Epistemologia de Bachelard e a aprendizagem do conceito de ressonância. **Revista Professor de Física**, Brasília, vol. 2, n. 2. p. 40-58. 2018.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. 1. ed. 11. Reimpressão. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1994.
- CERVO, Amado L.; BERVIAN, Pedro A.; SILVA, Roberto da. **Metodologia científica**. 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014.
- COSTA, Alan Cesar da. **Referenciais históricos e metodológicos para o ensino de frações**. 2010. 64 f. Monografia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.
- COSTA, Celma Laurinda Freitas. **O pensamento científico em Bachelard**. Anais do VI Colóquio Internacional – Educação e Contemporaneidade. São Cristóvão – SE, 2012.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Higino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- FILHO, Orencio Capestrano dos Anjos. **Propostas de aulas na Educação Básica de alguns conceitos matemáticos visando seu contexto histórico e aplicações nos dias atuais**. 2017. 119 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017a.
- FILHO, Roberto Loscha. **Fração: história, teoria e aplicações**. 2017. 105 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2017b.
- IFRAH, Georges. **História universal dos algorismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 1. ed. v.1. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.
- JAPIASSÚ, Hilton Peneira, **Introdução ao Pensamento Epistemológico**. Rio de Janeiro: Editor S.A. 1992.
- JOSÉ, Wander Alberto. **Obstáculos epistemológicos inerentes ao conceito de fração**. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação. Universidade Federal do Tocantins. Palmas, 2021.
- LOPES, Antônio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 31, p. 1-22, Rio Claro, 2008.



MARTINS, Josiane Bernini Jorente. **Relação entre Formação Docente e Desempenho de Alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental na Resolução de Problemas Matemáticos**. 2016. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Centro de Educação, Comunicação e Artes, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2016.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. 138 p. CAED-UFGM. Belo Horizonte. 2013.

NÓVOA, Antônio Sampaio da. **O lugar da licenciatura**. Revista Ensino Superior. São Paulo, ed. novembro/2016. Disponível em: <<http://www.revistaensinosuperior.com.br/o-lugar-da-licenciatura/>>. Acesso em: 10 jan. 2023.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

ROMEIRO, Irajá de Oliveira. **O movimento do pensamento teórico de professores sobre o conceito de fração e o sentido atribuído aos materiais didáticos na atividade de ensino**. 2017. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2017.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Jorge Zahar, Rio de Janeiro-RJ, 2012.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do Trabalho Científico**. 23 ed. São Paulo: Cortez, 2016.

SILVA, Maria José Ferreira da. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. 245 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

TRINDADE, José Análio de Oliveira. **Os Obstáculos Epistemológicos e a Educação Matemática**. 1996. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.