REVISTA BAIANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ARTIGO

https://doi.org/10.47207/rbem.v3i01.15620

Uma situação adidática para o desenvolvimento do raciocínio e pensamento probabilísticos em uma formação de professores

FIGUEIREDO, Auriluci de Carvalho
Professora da Universidade Metropolitana de Santos (UNIMES). Doutora em Educação Matemática. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2856-0064. E-mail: aurilucy@uol.com.br

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva
PUC-SP. Doutora em Didática da Matemática. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5625-1517. E-mail: cileda@pucsp.br

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar uma discussão sobre o desenvolvimento de uma situação adidática em um curso de formação continuada de professores de matemática que atuam na educação básica como ferramenta didática para a abordagem do conceito de probabilidade, pela confrontação entre seus enfoques clássico e frequentista. As pesquisas na área do ensino aprendizagem da probabilidade têm destacado a necessidade de os professores estarem melhor preparados para o trabalho em sala de aula, com atividades que possam promover o desenvolvimento do pensamento, raciocínio e letramento probabilísticos. Discutiremos apenas os aspectos do raciocínio probabilístico no presente texto. Neste estudo, a metodologia da pesquisa aplicada é de abordagem qualitativa. Dentre as conclusões, constatamos que as situações adidáticas construídas permitiram a esses professores trabalharem seus conhecimentos, possibilitando o reconhecimento de elementos importantes para o desenvolvimento do pensamento, raciocínio e letramento probabilísticos, de onde podemos inferir também uma melhora no trabalho didático para o desenvolvimento desses três pilares também com os alunos.

REVISTA BAIANA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Palavras-chave: Probabilidade. Pensamento Probabilístico. Raciocínio Probabilístico; Formação de Professores.

An Adidactic Situation for the Development of Probabilistic Reasoning and Thinking in a Teacher Education Course

Resumo: The objective of this work is to discuss the development of an adidactic situation as a didactic tool for approaching the concept of probability through the confrontation between its classic and frequentist approaches in a continuing education course for mathematics teachers who work in basic education. Research in the teaching-learning area of probability has highlighted the need for teachers to be better prepared for classroom work with activities that can promote the development of probabilistic thinking, reasoning, and literacy. We will only discuss aspects of probabilistic reasoning in this text. In this study, the applied research methodology is the qualitative approach. Among the conclusions, we found that the adidactic situations built allowed those teachers to work on their knowledge, enabling the recognition of important elements for the development of probabilistic thinking, reasoning, and literacy, from which we can also infer an improvement in the didactic work for the development of these three pillars also with students.

Keywords: Probability. Probabilistic thinking. Probabilistic reasoning. Teacher education.

Una situación adidáctica para el desarrollo del razonamiento y pensamiento probabilístico en un curso de formación docente

Resumen: El objetivo de este trabajo es presentar una discusión sobre el desarrollo de una situación didáctica como herramienta didáctica para el abordaje del concepto de probabilidad a través de la confrontación entre sus enfoques clásico y frecuentista en un curso de formación continua para profesores de matemáticas que actúan en la educación básica. La investigación en el área de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad ha destacado la necesidad de que los docentes estén mejor preparados para el trabajo en el aula, con actividades que puedan promover el desarrollo del pensamiento probabilístico, el razonamiento y la lectoescritura. Solo discutiremos aspectos del razonamiento probabilístico en este texto. En este estudio, la metodología de investigación aplicada es el enfoque cualitativo. Entre las conclusiones, encontramos que las situaciones didácticas construidas permitieron a los docentes trabajar sus saberes, posibilitando el reconocimiento de elementos importantes para el desarrollo del pensamiento probabilístico, el razonamiento y la lectoescritura, de lo cual también podemos inferir una mejora en el trabajo didáctico para el desarrollo de estos tres pilares también con los estudiantes.

Palavras-Clave: Probabilidad. Pensamiento Probabilístico. Razonamiento Probabilístico. Formación Docente.

Introdução

O século XXI está mergulhado em um mundo tecnológico complexo e baseado em dados. Assim que emerge a necessidade da alfabetização para a cidadania, preparando alunos e professores para tomarem decisões baseadas em dados, analisar, inferir e prever, o que requer conhecimentos probabilísticos.

As pesquisas na área do ensino e da aprendizagem da probabilidade como as de Batanero, Godino e Roa (2004), Cazorla (2009), Coutinho e Figueiredo (2020) e Cavalcante (2021) têm destacado a necessidade de os professores estarem melhor preparados para o trabalho em sala de aula, não somente com o uso de tecnologia, mas também com atividades envolvendo o pensamento e o raciocínio probabilístico de modo a promover o desenvolvimento de ambos, necessários nas tomadas de decisão.

O desenvolvimento do pensamento e do raciocínio probabilístico é, nos dias de hoje, um ponto crucial no ensino e na aprendizagem da matemática da escola básica. No Brasil, a inclusão de conteúdos relativos à probabilidade é preconizada em documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

Na BNCC, no eixo "Probabilidade e estatística", o documento sugere que estes objetos de conhecimento sejam trabalhados desde os anos iniciais do ensino fundamental e que ao longo da educação básica, o estudo da probabilidade seja ampliado e aprofundado por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações, confrontando os resultados obtidos pelo cálculo realizado à luz da probabilidade clássica com aqueles estimados à luz da probabilidade frequentista.

Originalmente foi apresentado na 11ª ICOTS um texto sob o título "Aspects of probabilistic thinking and reasoning with the use of compurt simulation". A expansão dessa comunicação científica gerou este artigo que apresenta resultados de uma pesquisa que toma como ponto de partida um curso de formação continuada de professores em ambiente virtual, tendo como tema a probabilidade na escola básica. Para esse curso, buscou-se organizar, ressignificar e possibilitar o trabalho do professor com conceitos que envolvem probabilidade para a educação básica em contexto de sala de aula, por meio de atividades práticas aliadas a pesquisas na área da educação matemática.

Discutiremos neste artigo um recorte dos temas tratados nesse curso de formação continuada, com o objetivo de levantar aspectos apresentados pelos professores quanto à mobilização de conhecimentos probabilísticos diante de uma atividade com uso de uma ferramenta didática para a abordagem do conceito de probabilidade e pela confrontação entre seus enfoques clássico e frequentista.

A atividade toma como base o uso de um *apllet* do GeoGebra que simula o jogo Franc-Carreau (FC), que consiste no lançamento de uma moeda sobre um piso de azulejos de forma quadrada. A posição FC, ocorre quando a moeda se imobiliza completamente dentro de um único azulejo.

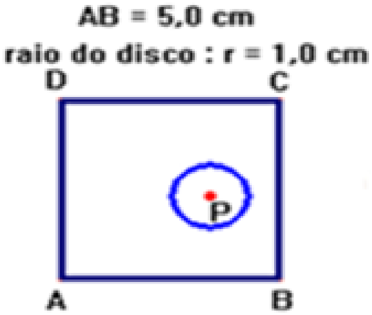

Figura 1: A moeda dentro do quadrado na posição FC.
Fonte: Autoras, 2022.

Revista Baiana de Educação Matemática, v. 03, n. 01, p. 01-18, e202218, jan./dez., 2022.
e-ISSN 2675-5246

A seguir descreveremos o jogo e algumas possibilidades de tratamento dos aspectos da probabilidade.

O jogo Franc Carreau e a probabilidade

O *applet* utilizado está disponível na internet, no próprio site do GeoGebra, de acesso gratuito: https://www.geogebra.org/m/zegKUvqP. Dos lançamentos consecutivos durante o jogo, constroem-se tabelas com as frequências acumuladas e as respectivas probabilidades de sair a posição FC nesses lançamentos. No jogo é possível tanto a manipulação da "moeda" dentro do "azulejo" como o lançamento dessa "moeda" tantas vezes quantas se queira. Os jogadores apostam sobre a posição final da moeda após imobilização: isto é, a posição da moeda parada dentro de somente um dos quadrados.

A Figura 2, mostra uma posição da moeda na qual não ocorreu FC, pois a moeda está parada ocupando parte de dois quadrados, e também apresenta a imagem do jogo após 94 lances com o número de ocorrências de (FC) e com outros dados e comandos que o *apllet* oferece em sua tela principal após cada lance da simulação.

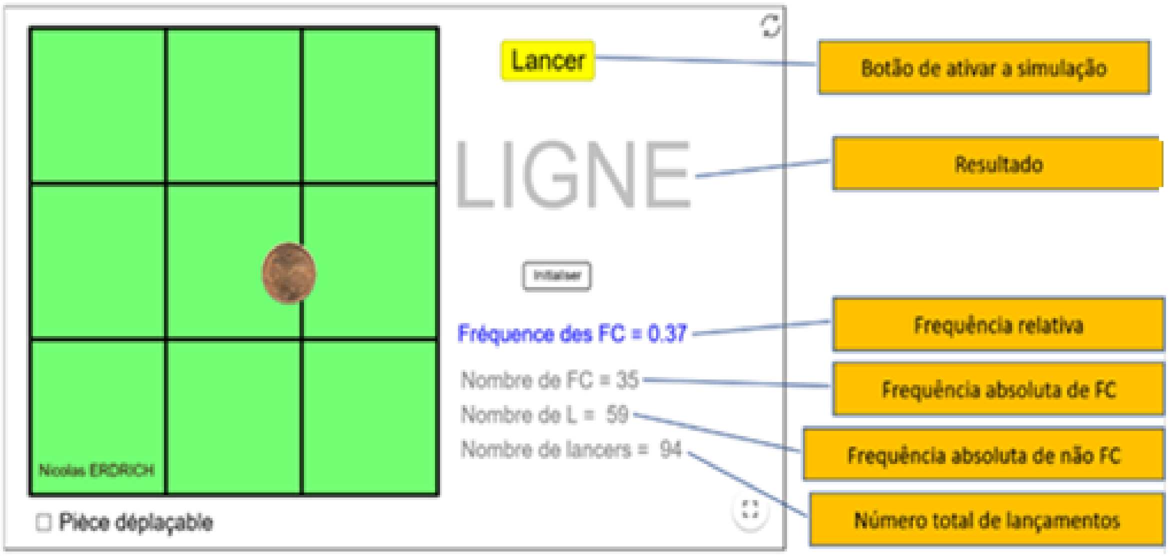

Figura 2: Dados e comandos disponíveis no *applet*.
Fonte: Autoras, 2022.

As dimensões dos quadrados e da moeda são fixas, sendo a figura composta por nove quadrados de 5 cm de lado, e o raio da moeda de 1 cm.

Da perspectiva de probabilidade frequentista surge a questão de quantos lançamentos seriam suficientes para admitir qual a probabilidade de acontecer a posição da moeda em FC. Coutinho (1994) cita dois teóricos importantes nesse campo:

> (...) Alfred Rényi (1966), segundo o qual “probabilidade de um evento é o número ao redor do qual oscila a frequência relativa desse evento considerado”, assim como Hélène Ventsel (1973), para quem "caracterizar a probabilidade de um evento como um número qualquer significa atribuir a esse número um valor e uma significação que não pode ser outra que não a de frequência relativa desse evento". (COUTINHO, 1994, p.31, tradução da autora)

Em termos atuais: $P(A) = \lim_{n\to\infty} Fr_n(A)$. Como o valor da probabilidade é único (considerar definição axiomática), o enfoque frequentista nos fornece uma boa estimativa para esse valor, qual seja: $P(A) = \frac{n.sucessos}{n.total\ de\ casos}$, sendo o espaço amostral equiprovável (todos os pontos no interior do quadrado que representa a lajota são equiprováveis), definição proposta por Pascal e Fermat, a qual, axiomatizada por Laplace (1814, 1951) em seu *Essai philosophique sur les probabilités*, é utilizada até hoje nas escolas.

Nessas condições, Coutinho (2001) mostrou que a atividade construída a partir do jogo *Franc Carreau* fornece condições didáticas para a construção do conceito de probabilidade pela confrontação entre os dois enfoques, clássico e frequentista. Justificamos assim a escolha desse jogo para a abordagem na formação de professores que discutimos no presente artigo.

Caminhos metodológicos e fundamentação teórica

Neste estudo, a metodologia da pesquisa aplicada é de abordagem qualitativa, um estudo de caso, modalidade que visa conhecer uma entidade bem definida em um sistema educativo, de acordo com Ponte (2006).

A formação ocorreu em ambiente virtual, na plataforma Microsoft *Teams*, com canais disponibilizados para que os professores pudessem trabalhar em grupos as questões a serem resolvidas. Utilizou-se também a planilha eletrônica Excel e seus recursos.

O ambiente foi organizado para permitir a participação efetiva de todos os 17 professores inscritos, seja em momentos com todo o grupo para discussões mais amplas ou em momentos de organização em pequenos grupos, propiciada pelo uso da ferramenta “canal” presente no ambiente virtual da plataforma supracitada. Cada grupo se alocava em um canal, no qual poderiam executar ações como compartilhar tela, gravar e participar do chat.

Ao início de cada encontro fazia-se uma contextualização em plenária e propunha-se um problema que deveria ser resolvido nos grupos. Ao final da sessão, todos voltavam para o ambiente de plenária para apresentar e discutir o realizado nos canais dos grupos.

A formação do Módulo II, referente à Probabilidade, foi programada a princípio para cinco encontros de três horas, porém não foram suficientes para tratar dos tópicos referentes à educação básica, de modo que o ampliamos para sete encontros.

Algumas informações de como foram conduzidos esses encontros estão apresentadas a seguir no quadro I:

Quadro 1 – Roteiro de condução do curso de formação – Módulo II

Encontros	**Roteiro**
1º	O Ambiente Microsoft *Teams*; Filme: Coisa de Passarinho (Link https://www.youtube.com/watch?v=EuPGf5ul6y0&t=570s; Brainstorming; Nuvem de Palavras; Mapa conceitual - frases com os nomes das categorias.
2º	Filme: Uma conversa com Fermat (link: https://www.youtube.com/watch?v=E5Ais7qIDrk&t=388s; Letramento Probabilístico – Gal (2015); O Jogo Justo – atividade; Reflexão: A atividade, a BNCC e o letramento probabilístico. Atividade: O jogo da Soma.
3º e 4º	A Probabilidade Frequentista; Probabilidade Clássica - Probabilidade Geométrica; Probabilidade Frequentista X Probabilidade Clássica – relações e implicações para o letramento estatístico; O jogo *Franc – Carreau* e sua história; *Applet* – GeoGebra; Planilha Excel; A Atividade – *Franc Carreau*; Reflexão: A atividade, a BNCC e o letramento probabilístico.
5º e 6º	A Probabilidade Subjetiva: Probabilidade Condicional; Probabilidade Clássica; Parzysz (1997, 2003): a árvore de Probabilidade como objeto de conhecimento; A Atividade: articular a árvore de probabilidade, tabela de dupla entrada e o registro simbólico de probabilidade; Letramento Probabilístico – Gal (2015); Reflexão: A atividade, a BNCC e o letramento probabilístico.
7º	A Atividade: articular a árvore de probabilidade, tabela de dupla entrada e o registro simbólico de probabilidade. Livro didático, provas abertas e o ensino de probabilidade.

Fonte: elaborada pelas autoras

Para esse artigo, analisaremos o resultado de uma das atividades propostas aplicadas a 17 professores do curso. Ou seja, o caso aqui analisado foi formado pelo grupo de 17 professores participantes. No desenvolvimento da atividade, propôs-se uma abordagem para a organização de situações didáticas que visam melhorar o conhecimento probabilístico e pedagógico dos professores à luz da teoria das situações didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1986).

De acordo com Almouloud (2017), a TSD procura desenvolver processos de aprendizagem dos conceitos matemáticos, no nosso caso conceitos relacionados à probabilidade, por meio de situações. Seu olhar se focaliza nas situações didáticas e nas interações produzidas entre aluno, professor e saber. Tais situações didáticas devem ser reprodutíveis e ter potencial para modificar um conjunto de comportamentos dos alunos. “Essas modificações são características da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos/saberes, de ocorrência de uma aprendizagem significativa” (ALMOULOUD, 2017, p. 113).

Segundo essa teoria, o aluno passa por três fases interdependentes que compõem a situação adidática. Uma fase de ação, em que ele pode solucionar um problema ou uma tarefa por meio de ferramentas apropriadas sem, no entanto, refletir ou explicar o significado dessas ações. É a fase na qual o sujeito aprendiz busca no seu *milieu* os elementos necessários para o desenvolvimento da estratégia que resolverá o problema proposto. Uma fase de formulação, na qual há troca de informações ou estratégias entre alunos e entre alunos e professor para a solução de um problema ou tarefa, necessitando para tais trocas o uso da linguagem, porém ainda sem justificá-las. E uma fase de validação, na qual o aluno argumenta, justifica, valida, convence, prova e é capaz de produzir enunciados declarativos referentes ao problema ou tarefa.

Por fim, o professor desenvolve a institucionalização, já na fase didática, na qual, segundo Brousseau:

> ele define, entre outros, o que o aluno deveria apreender da situação global, dá um estatuto social e científico ao conhecimento/saber; estabelece as convenções, as notações/representações, o vocabulário; evidência do que o aluno deve se apropriar em termos de conhecimentos/saberes que futuramente podem ser usados na resolução de novos problemas (BROUSSEAU, 1986, p. 49, apud ALMOULOUD, 2017, p. 115).

A situação adidática proposta se encontra no quadro 2.

Quadro 2 – Situação adidática aplicada aos professores do curso de formação continuada

a) Alguns procedimentos iniciais com o *applet* Franc Carreau (FC).
I) Façam simulações de lançamentos da moeda no *software*.
II) A cada 10 lançamentos, anotem: Número de lances que foram de FC; Número total

de lances. III) Construam uma tabela no EXCEL com os resultados que encontraram para frequência absoluta e acumulada da ocorrência FC (criem uma coluna com as frequências observadas e, para cada resultado, determinem a frequência relativa acumulada). III) Façam o mesmo a cada 20 lançamentos e aumentem, caso achem necessário.
b) Analisem os itens abaixo: I)Vocês conseguiram encontrar uma estabilização dessa frequência relativa acumulada nos lançamentos que resultaram na posição FC? Justifiquem. II) Quantas repetições do experimento realizaram? III) Qual a probabilidade de lançar uma moeda e cair em FC nesse jogo? IV) Como poderiam explicar o cálculo dessa Probabilidade pelo enfoque clássico ou frequentista?
c) Suas impressões sobre a atividade: I) Encontraram alguma dificuldade em compreender e realizar a simulação do experimento “lançar uma moeda e observar a posição final após imobilização” utilizando o *applet* FC? Quais? II) Vocês consideraram um bom recurso para trabalhar com alunos os conceitos de probabilidade, simulação, e os enfoques clássico e frequentista com a probabilidade Geométrica? Justifiquem.
d) Relação da atividade com a BNCC (2018) e o Letramento probabilístico de Gal (2005). I) Que aspectos da BNCC (2018) estariam colocando em ação com a atividade? Justifiquem. II) Em relação ao letramento probabilístico de Gal (2005), em quais conjuntos de disposições a atividade pode proporcionar mobilização? Para quais segmentos de ensino e ano consideram relevantes? Justifiquem.

Fonte: as autoras

No desenvolvimento da atividade usamos a planilha eletrônica *Excel* e seus recursos. O ambiente foi organizado de forma a permitir a participação efetiva de todos os 17 professores inscritos, seja em momentos com todo o grupo para discussões mais amplas, seja em momentos de organização em pequenos grupos, propiciada pelo uso da ferramenta “canal” presente no *Microsoft Teams*. Essa atividade teve duração de dois encontros de três horas cada um.

O ambiente em que ocorreu a formação, em específico durante essa atividade, pôde proporcionar não só a captação das naturezas do pensamento e do raciocínio probabilístico mobilizados pelos professores participantes do curso diante de suas questões, mas também possibilitou a ampliação desse repertório.

Para essa análise tomamos como base Borovcnik (2016), que sintetiza ideias sobre o pensamento probabilístico e do quanto este está ligado a alguns elementos como a aleatoriedade, o caráter teórico da probabilidade e independência, e o risco, entre outros. Para análise do raciocínio probabilístico que emerge na realização das atividades, consideramos os estudos de Jones *et al*.

Jones *et al*. (1999), apontam elementos para o raciocínio probabilístico e indicam que esses se encontram diante de seis conceitos-chave: espaço amostral, probabilidade experimental de um evento, probabilidade teórica de um evento, comparações de probabilidade, probabilidade condicional e independência. A partir desses conceitos estabeleceram uma classificação de quatro níveis de raciocínio probabilístico: o nível 1 está associado ao raciocínio subjetivo ou não quantitativo; o nível 2 é visto como uma transição entre o raciocínio quantitativo subjetivo e ingênuo; o nível 3 envolve o uso de raciocínio quantitativo informal; e o nível 4 incorpora raciocínio numérico.

Apresentamos a seguir, no quadro 3, os níveis do raciocínio probabilístico em relação a dois dos conceitos-chave de acordo com Jones *et al.* (1999), a probabilidade experimental e a probabilidade teórica de um evento.

Quadro 3 – Estrutura que descreve os níveis em relação aos conceitos-chave de acordo com Jones *et al.* (1999)

Constructo	Nível Subjetivo	Nível transitório	Nível Quantitativo Informal	Nível Numérico
Probabilidade Experimental de um evento	- Considera os dados de experimentos aleatórios como irrelevantes e usa julgamentos subjetivos para determinar o evento mais ou menos provável. - Indica pouca ou nenhuma consciência de qualquer relação	- Coloca muita fé em pequenas amostras de dados experimentais ao determinar o evento mais ou menos provável; acredita que qualquer amostra deve ser representativa da população. - Pode reverter para julgamentos	- Começa a reconhecer que uma amostragem mais extensa é necessária para determinar o evento que é mais ou menos provável. - Reconhece quando uma amostra de tentativas	- Coleta dados apropriados para determinar um valor numérico para a probabilidade experimental. - Reconhece que o experimental probabilidade, determinada a partir de uma grande amostra de tentativas, aproxima-se da probabilidade teórica.

	entre probabilidades experimentais e teóricas.	subjetivos quando os dados experimentais entram em conflito com noções preconcebidas.	produz uma probabilidade experimental que é marcadamente diferente da probabilidade teórica.	- Pode identificar situações em que a probabilidade de um evento pode ser determinada apenas experimentalmente.
Probabilidade Teórica de um evento	- Prevê o evento mais ou menos provável com base em julgamentos subjetivos. - Reconhece eventos certos e impossíveis.	- Prevê o evento mais ou menos provável com base em julgamentos quantitativos, mas pode reverter para julgamentos subjetivos.	- Prevê os eventos mais ou menos prováveis com base em julgamentos quantitativos. -Usa números informalmente para comparar probabilidades.	- Prevê eventos mais ou menos prováveis para um e simples experimentos de dois estágios. - Atribui uma probabilidade numérica a um evento (uma probabilidade real ou uma forma de probabilidade).

Fonte: Jones *et al.*, (1999, p.150).

Análise e resultados da atividade proposta

Para a atividade apresentada anteriormente, os professores se organizaram de maneira livre em três grupos de trabalho alocados em três canais do *Teams*. Denominamos aleatoriamente A, B e C os canais para analisar tanto as respostas que os professores deram às atividades quanto os diálogos que produziram entre eles em cada um desses canais.

Embora as discussões entre os três grupos tenham levantado muitos temas comuns, apresentaremos no artigo com maior ênfase as do grupo C. Esse grupo, assim como os outros dois grupos, começou a realizar o lançamento da moeda no *applet* individualmente, isto é, cada elemento do grupo fez uma tabela e depois juntaram os resultados como na figura 3, totalizando 100 lançamentos no grupo, e chegaram à conclusão de que 20 lançamentos não seriam suficientes para estimar a probabilidade desejada e continuaram a fazer mais lançamentos individualmente, chegando a 150 cada, conforme figura 4:

	FC	NFC	f
Professor 1	9	11	0,45
Professor 2	8	12	0,4
Professor 3	5	15	0,25
Professor 4	6	14	0,3
Professor 5	7	13	0,35
Total	35	65	

Figura 3 – Resultado de 20 lançamentos de professor do grupo C (dados da pesquisa).
Fonte: Arquivo da pesquisa.

	FC	NFC	f
Professor 1	68	82	0,453333
Professor 2	53	97	0,353333
Professor 3	48	102	0,32
Professor 4	50	100	0,333333
Professor 5	53	97	0,353333
Total	272	478	

Figura 4 – Resultado de 150 lançamentos de cada professor do grupo C
Fonte: Arquivo da pesquisa

Esses professores começam a reconhecer que um número maior de repetições da experiência é necessário para determinar a probabilidade desejada, o que indica que nesse momento eles estão no nível quantitativo informal do raciocínio probabilístico, nos termos de Jones *et al.* (1999), porém não mostram reconhecer que a probabilidade experimental é determinada a partir de um grande número de repetições do experimento aleatório em questão e que se aproxima da probabilidade teórica (laplaciana), pois não mostram tentativas de encontrar a tal forma de cálculo da probabilidade e nem conhecimento da necessidade de se repetir o experimento um grande número de vezes, o que os classificaria no nível 4 do raciocínio probabilístico segundo Jones *et al.* (1999), nível numérico.

Dessa forma, percebemos que a relação existente entre o valor da probabilidade frequentista e o valor da probabilidade clássica ainda não faz parte do *milieu* desses professores, nos termos da Teoria das Situações Didáticas.

Em relação a apresentação, o grupo C identificou que os resultados obtidos na situação representada na figura 3 se mostraram muito diferentes entre os participantes, o que não os possibilitou chegar a alguma conclusão de que tal simulação levaria a um número que pudesse ser comum a todos, ou pelo menos próximo. Nesse momento o grupo parece identificar o caráter aleatório da probabilidade por meio das simulações, segundo Borovcnik (2016) um dos pilares do pensamento probabilístico.

Nesse momento, o grupo se depara com o número de simulações representado pela figura 4 e formula algumas questões: *Quantas simulações são necessárias para determinar* *essa probabilidade? Será que realmente poderemos chegar a algum número que satisfaça?* (diálogo registrado em audiogravação)

Nessa etapa houve uma interferência dos professores da formação no que se refere ao conceito de probabilidade frequentista, algo que ocorreu nos três grupos A, B, e C. O fato mostrou que todos os professores envolvidos não tiveram contato com a probabilidade frequentista, ou que esta não foi apreendida devidamente. Tal fato confirma nossa hipótese de que a probabilidade frequentista não está no *milieu* desses professores.

Dessa forma, podemos inferir que a atividade do jogo FC foi eficiente para introduzir o conceito de probabilidade frequentista, e que foi desenvolvida efetivamente como uma situação adidática, nos termos de Brousseau (1986): a devolução feita pelos pesquisadores responsáveis pela formação, as dialéticas de ação, formulação e validação ficaram bem caracterizadas nos diálogos dos professores, conforme ilustrado no texto (busca independente de solução mobilizando seus próprios conhecimentos e os conhecimentos introduzidos no *milieu* pelo *applet*, troca de experiências para tornar a experiência de todo o grupo e busca de resultado comum para realizar a validação, tudo ocorrendo de forma articulada, efetivamente como uma dialética), e, finalmente, a institucionalização do conceito de probabilidade frequentista, feita pelos pesquisadores responsáveis pela formação.

A partir da interferência o grupo alterou a estratégia de coleta dos dados e começou a dividir as tarefas utilizando o compartilhamento de telas no canal, mostrando a tabela construída enquanto somente um dos elementos fazia o lançamento das moedas. Geraram outra tabela no próprio Excel, apresentada na figura 5:

Nº lances	**FC**	**NFC**	**f**	**Nº lances**	**FC**	**NFC**	**f**
50	18	32	0,36	550	193	357	0,35
100	36	64	0,36	600	212	388	0,35
150	56	94	0,37	650	234	416	0,36
200	74	126	0,37	701	253	448	0,36
250	96	154	0,38	750	271	479	0,36
300	118	182	0,39	800	291	509	0,36
350	141	209	0,4	850	311	539	0,37
400	156	244	0,39	900	334	566	0,37
450	156	294	0,35	950	354	596	0,37
500	182	318	0,36	1000	372	628	0,37

Figura 5 – Registro dos resultados de 1000 lançamento da moeda no jogo do grupo C.
Fonte: Arquivo da pesquisa

Aqui, o grupo começa a identificar a possibilidade de que a quantidade de simulações do jogo vai tendo um comportamento de que a probabilidade de ocorrer o FC se aproxima de um determinado número; porém, neste tipo de representação da figura 5, o grupo dispensou as casas decimais que estava empregando anteriormente figura 4. Ainda, admite que suas retomadas de decisão no tempo destinado à realização da atividade não foram suficientes para que formulasse a resposta de acordo com o que gostaria, mas como a atividade proposta demandaria outras questões a serem respondidas, o grupo resolveu se ater somente ao *applet*, configurado para fornecer resultados com duas casas decimais. Na sequência os integrantes do grupo elaboraram um gráfico com os dados da tabela para melhor visualizarem o comportamento dos dados, apresentado na figura 6:

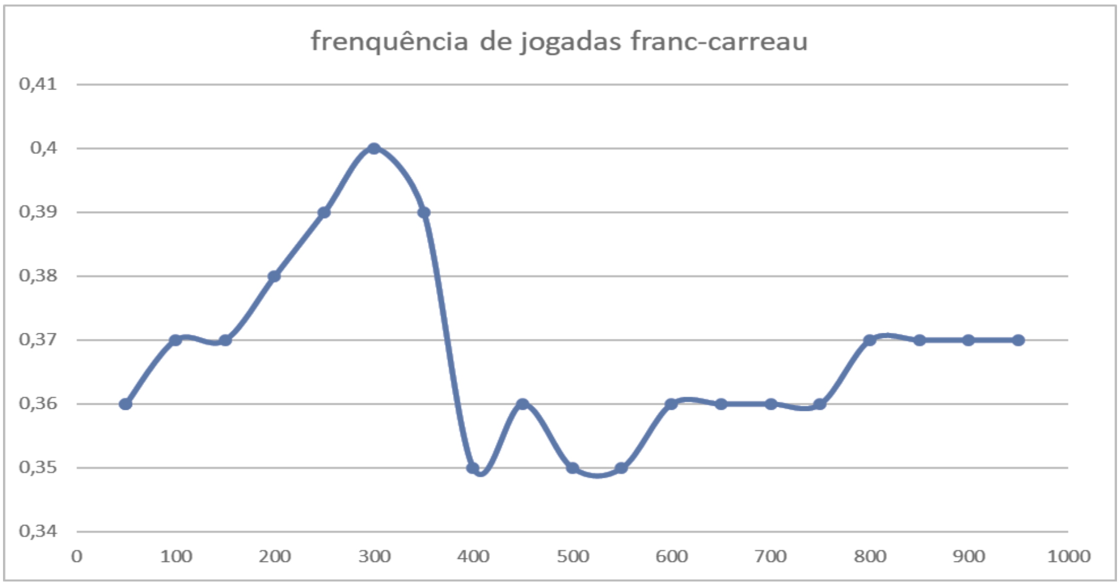

Figura 6 – Representação gráfica dos dados da figura 4 do grupo C.
Fonte: Arquivo da pesquisa)

Na plenária, isto é, na apresentação geral de todos os grupos, os participantes concordam que a representação gráfica auxilia a identificação da probabilidade da posição FC no jogo quando se utiliza a visão frequentista, porém apresentam dificuldade de calcular tal probabilidade pela visão clássica, de maneira que consigam realizar a comparação entre elas. Somente um professor de um dos grupos conseguiu esboçar suas ideais sobre esse cálculo.

Todos conhecem o conceito de probabilidade pela visão clássica, isto é, razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral, porém não reconhecem a área dos quadrados como possibilidade para esses números e, portanto, a probabilidade geométrica não faz parte do repertório de atividades que esses professores propõem aos seus alunos da educação básica, ou seja, não está no *milieu*. Este fato nos possibilita levantar a hipótese de que existam outros constructos chaves do raciocínio probabilístico que esses professores não dominem, o que nos abre uma perspectiva de pesquisa sobre níveis de raciocínio probabilístico, nos termos de Jones *et al.* (1999).

O tempo para discutir todos os pontos relacionados à atividade não foi suficiente e os professores solicitaram mais tempo para que pudessem apreender melhor todos os conceitos envolvidos na atividade e refletir mais antes de uma nova explanação em plenária. Todos concordamos e após uma semana, em um novo encontro no ambiente online *Teams*, os grupos voltaram a apresentar não só as questões da atividade, mas algumas reflexões sobre suas práticas enquanto professores. Esse fato nos remete a Jones *et al.* (1999), para quem o raciocínio probabilístico se desenvolve ao longo do tempo, algo observável na demanda desses professores por tempo de reflexão que se fez necessário para o melhor desenvolvimento dos conceitos e das ideias que emergiram no decorrer da atividade.

No segundo encontro, os professores trouxeram para a plenária uma nova apresentação de lançamentos da moeda no jogo e uma representação tabular e gráfica com um número maior de simulações. Todos identificaram a necessidade de um número maior de lançamentos para confirmar a probabilidade de ocorrência do evento FC no jogo. Indo além dessas constatações, um dos grupos apresentou cálculo da probabilidade clássica utilizando não somente a explicação geométrica para ela, mas uma certa generalização, e considerando na fórmula apresentada o raio e as medidas do quadrado, como apresentado na figura 7 a seguir:

$$P(FR) = \frac{(l-2\cdot r)^2}{l^2} = \frac{(5-2\cdot 1)^2}{5^2} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} = 0,36$$

Figura 7: Cálculo pela probabilidade de FC no jogo, apresentada pelo grupo A.
Fonte: Arquivo da pesquisa

Em relação à resposta apresentada pelos professores na questão da atividade d): I) Que aspectos da BNCC (2018) estariam colocando em ação com a atividade?", esses professores apontaram uma melhor compreensão das indicações do documento após a realização da atividade e quais conceitos considerariam como objetos do conhecimento para desenvolver com alunos da educação básica, dentre os quais: eventos aleatórios, noção de acaso, frequências de ocorrências, probabilidade frequentista e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrência. Essa nova compreensão das indicações do documento por parte dos professores parece ter oportunizado diálogos pelos pares e surgem, para estas novas possibilidades de trabalho com alunos da educação básica utilizando a probabilidade frequentista.

Os professores participantes realizaram a probabilidade de lançar moedas nesses quadrados do jogo FC, porém utilizando moedas do nosso sistema monetário, simularam também o lançamento de uma moeda de R$ 1,00 em um quadrado de lado 5 cm. Esses professores acreditaram que seria uma possibilidade para trabalhar a compreensão da probabilidade geométrica e frequentista, fazendo os lançamentos sem a ferramenta tecnológica, considerando que existem algumas escolas que não dispõe desses recursos para os alunos. Apresentamos a seguir na figura 8, como o grupo C apresentou essa possibilidade.

raio da moeda de (R$ 1,00) = 1,35 cm
quadrado tem 5 cm de lado
Área total do quadrado = 25 cm²
Área do espaço Franc Carreau = 2,3 x2,3 Área do Espaço Franc Carreau = 5,29 cm²
P = 5,29/25 = 0,2116

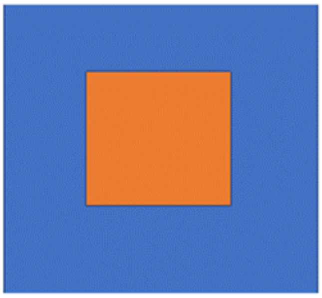

Figura 8 – Probabilidade de ocorrência de FC ao utilizar uma moeda de R$ 1,00, representada pelo grupo C.
Fonte: Arquivo da pesquisa

A figura composta pelos dois quadrados coloridos foi construída pelo grupo de professores utilizando recursos do próprio *Word*, procurando ser fiéis às medidas do lado dos quadrados. Obtiveram a medida dos lados do quadrado laranja, pela medida do raio da moeda de R$1,00 que é 1,35 cm, e com isso, 5cm – 2,7 cm = 2,3.

Realizaram esse experimento com outras moedas do nosso sistema monetário e sugeriram criar novo tabuleiro, com outros quadrados, de forma que pudesse ser desenhado na própria sala de aula e que os alunos da escola básica pudessem desfrutar dos procedimentos desse jogo tanto quanto do conhecimento probabilístico que este oferece.

Com esses professores, observou-se que o nível de letramento probabilístico é dependente do raciocínio e pensamento probabilístico. E mais, que à medida que o nível de letramento probabilístico aumenta, o raciocínio e o pensamento probabilístico tornam-se mais apurados.

Considerações finais

Os professores participantes do curso admitiram que tanto a probabilidade frequentista como a probabilidade geométrica envolviam conceitos novos para eles, o que nos chamou a atenção devido ao seu tempo de magistério. O intervalo interquartílico nos permitiu observar que 50% dos professores participantes já tinham de 1,3 anos a 8,5 anos de experiência no ensino, o que nos levou à hipótese de que já tivessem tido algum contato com os conteúdos probabilísticos a serem abordados em sala de aula. Segundo Huberman (1990, *apud* BOLIVAR 2002, p.54), essa é a fase da estabilização (quatro a seis anos de magistério), marcada pela "consolidação de um repertório de habilidades práticas de base, que trazem segurança no trabalho e identidade profissional".

Entretanto, a situação didática concebida à luz da Teoria das Situações Didáticas permitiu não apenas a abordagem da probabilidade com professores em exercício na escola básica, mas também uma discussão sobre como esses professores poderiam aplicar o jogo assim concebido com seus alunos. Dessa forma, favoreceu a construção ou o aprofundamento de conhecimentos específicos sobre probabilidade, o trabalho com seus próprios conhecimentos e o reconhecimento de elementos importantes para o desenvolvimento do pensamento e do raciocínio probabilístico.

Nossos achados indicam que há necessidade de cursos de formação continuada para professores da educação básica que abordem conhecimentos probabilísticos e suas possibilidades de articulação entre letramento, pensamento e raciocínio probabilístico, além de pesquisas na área que identifiquem dificuldades e novos caminhos a se percorrer.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos**.** *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática.* Florianópolis, v.11, n.2, p.109-141, 2016. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p109

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ROA, R. Training Teachers to Teach Probability. *Journal of Statistics Education*, San Luis Opispo, Califórnia, v.12, n.1, 15p., 2004. https://doi.org/10.1080/10691898.2004.11910715

BOLIVAR, A. (org). *Profissão professor:* o itinerário profissional e a construção da escola. Bauru: EDUSC, 2002.

BOROVCNIK, M. Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v.18, n.3, p.1491-1516, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.7, n.2, p.33-116, 1986.

CAVALCANTE, J, L.; LIMA, A. P. B.; ANDRADE, V. L.V.X. O ensino de probabilidade na licenciatura em matemática: considerações para um modelo epistemológico de referência. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 23, n. 1, p.58-78, 2021. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p58-78

CAZORLA, I. M. *O ensino de Estatística no Brasil*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 2009.

COUTINHO, C. Q. S ; FIGUEIREDO, A. C. Simulação Computacional: Aspectos do Ensino da Probabilidade. Frequentista. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.28, p.1-18–e020017, 2020. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656869

COUTINHO, C. Q. S. *Introdução ao conceito de probabilidade pela visão freqüentista: estudo epistemológico e didático.* 1994. Dissertação de mestrado. PUCSP. São Paulo.

COUTINHO, C. Q. S. *Introduction aux situations aléatoires dès le collège: De la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri*-géomètre II Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001. https://www.theses.fr/2001GRE10077

GAL, I. Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G.A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*, p. 39-63. Springer, 2005. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

JONES, G. A.; THORNTON, C. A.; LANGRALL, C. W.; TARR, J. E. Understanding students' probability reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, p. 146–155, 1999.

LAPLACE, P. S. *A philosophical essay on probabilities*. New York: Dover Publications. (Original publicado em 1814), 1714.

PONTE, J. P. *Estudos de caso em educação matemática. Quadrante*, Lisboa, v.3, n.1, p. 3-18, 2006.

Artigo submetido em: 14/11/2022

Artigo aceito em: 19/12/2022